VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

目　录

第 12 章　结构动力学......5
12.1　复习笔记......5
12.2　课后习题详解......40
12.3　名校考研真题详解......66
第 13 章　结构弹性稳定......74
13.1　复习笔记......74
13.2　课后习题详解......89
13.3　名校考研真题详解......108
第 14 章　结构的极限荷载......112
14.1　复习笔记......112
14.2　课后习题详解......123
14.3　名校考研真题详解......131
第 15 章　悬索计算......132
15.1　复习笔记......132
15.2　课后习题详解......140
15.3　名校考研真题详解......144

第 12 章　结构动力学

12.1　复习笔记

【知识框架】

- 结构动力学
  - 基本概念
    - 动力荷载与静力荷载
    - 自由振动和强迫振动
    - 结构动力计算的目的
  - 结构振动的自由度
    - 振动自由度的定义
    - 结构按自由度的数目分类：单自由度结构和多自由度结构
    - 确定结构的振动自由度
    - 无限自由度结构
  - 单自由度结构的自由振动
    - 自由振动的原因：初始位移、初始速度
    - 不考虑阻尼时的自由振动
    - 考虑阻尼时的自由振动
  - 单自由度结构在简谐荷载作用下的受迫振动
    - 简谐荷载作用下单自由度受迫振动
    - 不考虑阻尼的纯受迫振动
    - 考虑阻尼的纯受迫振动
  - 单自由度结构在任意荷载作用下的受迫振动
    - 瞬时冲量作用于质点
    - 任意动力载荷作用下的质点位移公式
    - 两种特殊载荷作用下的质点位移公式
  - 多自由度结构的自由振动
    - 振动微分方程
    - 按柔度法求解
    - 按刚度法求解
    - 主振型的正交性
  - 多自由度结构在简谐荷载作用下的的受迫振动
    - 按柔度法求解
    - 按刚度法求解
  - 振型分解法
    - 振型分解法的优点
    - 振型分解法的步骤
  - 多自由度结构在任意荷载作用下的受迫振动
    - 振动微分方程组的建立
    - 振动微分方程组的解耦
    - 待定常数的确定
    - 求解的具体步骤
  - 地震作用的计算
    - 地震作用的基本概念
      - 地震作用的定义
      - 地震作用的分类：水平地震和竖向地震
      - 地震作用的实质
    - 单自由度结构的地震作用计算
    - 多自由度结构的地震作用计算
  - 无限自由度结构的振动
    - 梁的自由振动
    - 简谐均布干扰力作用下的受迫振动
  - 计算频率的近似计算方法：能量法、集中质量法、用相当梁法计算桁架的最低频率

【重点难点归纳】

一、基本概念

1．动力载荷与静力载荷

（1）静力载荷

静力荷载是指施力过程缓慢，不致使结构产生显著的加速度，因而可以略去惯性力影响的荷载。

（2）动力载荷

①定义

动力载荷是指使结构产生不容忽视的加速度，因而必须考虑惯性力的影响的荷载。

②分类

a．周期荷载

第一，周期荷载是指随时间按一定规律改变大小的周期性荷载。

第二，简谐周期荷载是指按正弦（或余弦）规律改变大小的周期载荷。

b．冲击荷载

冲击载荷是指把全部量值加于结构而作用时间很短即行消失的荷载。例如打桩机的桩锤对桩的冲击、车轮对轨道接头处的撞击等。

c．突加荷载

突加荷载是指在一瞬间施加于结构上并继续留在结构上的荷载。例如粮食口袋卸落在仓库地板上时就是这种荷载。这种荷载包括对结构的突然加载和突然卸载。

d．快速移动的荷载

例如高速通过桥梁的列车、汽车等。

e．随机荷载

随机荷载是指变化极不规则，在任一时刻的数值无法预测，其变化规律不能用确定的函数关系来表达，只能用概率的方法寻求其统计规律的载荷。例如风力的脉动作用、波浪对码头的拍击、地震对建筑物的激振等。

（3）两者计算主要差别

二者的主要差别就在于是否考虑惯性力的影响。

2．自由振动和强迫振动

（1）自由振动

自由振动是指结构受到外部因素干扰发生振动，而在以后的振动过程中不再受外部干扰力作用的振动。

（2）强迫振动

强迫振动是指结构收到外部因素干扰发生振动，并在以后的振动动过程中还不断受到外部干扰力作用的振动。

3．结构动力计算的前提和目的

（1）结构动力计算的前提

结构在受迫振动时各截面的最大内力和位移都与结构自由振动时的频率和振动形式密切有关，因而寻求自振频率和振型就成为研究受迫振动的前提。

（2）结构动力计算的目的

确定动力荷载作用下结构的内力、位移等量值随时间而变化的规律，从而找出其最大值以作为设计或检算的依据。

二、结构振动的自由度

1．定义

结构振动的自由度是指结构在弹性变形过程中确定全部质点位置所需的独立参数的数目。

2．结构按振动自由度的数目分类

（1）单自由度结构

单自由度结构是指具有一个振动自由度的结构。

（2）多自由度结构

多自由度结构是指振动自由度大于 1 的结构。

3．确定结构振动自由度

（1）由确定质点位置所需的独立参数数目来判定

①如图 12-1-1（a）所示结构，在绝对刚性的杆件上附有三个集中质点，它们的位置只需一个杆件的转角 α 便能确定，故其自由度为 1。

②如图 12-1-1（b）所示简支梁上附有三个集中质量，若梁本身的质量可以略去，又不考虑梁的轴向变形和质点的转动，其上三个质点的位置只需由挠度 y_1、y_2、y_3 就可确定，故其自由度为 3。

③如图 12-1-1（c）所示刚架虽然只有一个集中质点，但其位置需由水平位移 y_1 和竖直位移 y_2 两个独立参数才能确定，故其自由度为 2。

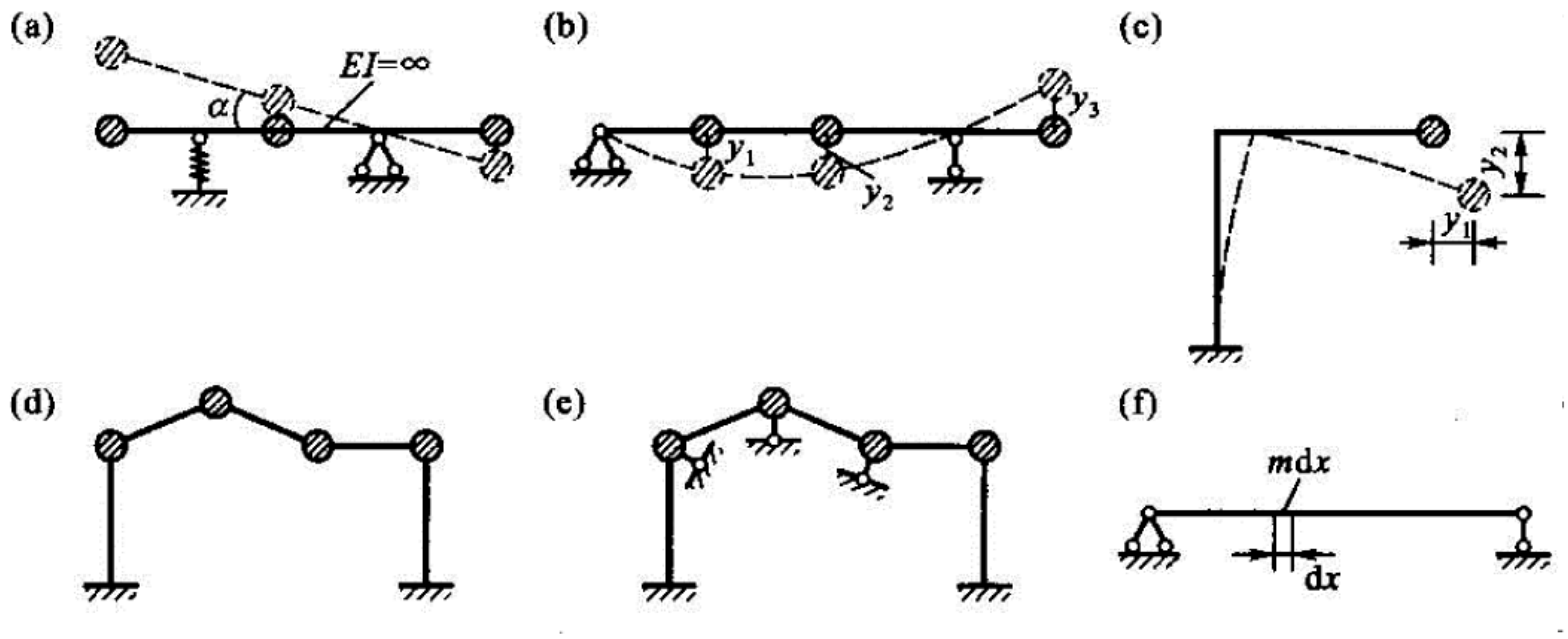


图 12-1-1

（2）由加入最少数量的链杆数目来判定

加入最少数量的链杆以限制刚架上所有质点的位置，则该刚架的自由度数目即等于所加入链杆的数目。

例如图 12-1-1（d）所示刚架上虽有四个集中质点，但只需加入三根链杆便可限制其全部质点的位置（12-1-1（e）），故其自由度为 3。

4．无限自由度结构

（1）定义

无限自由度结构是指具有连续分布的不可忽略的质量的结构。

（2）举例

例如图 12-1-1（f）所示的梁，其分布质量集度为 m，可看作是无穷多个 mdx 的集中质量，所以它是无限自由度结构。

三、单自由度结构的自由振动

1．自由振动的原因

（1）结构具有初始位移

（2）结构具有初始速度

2．不考虑阻尼时的自由振动

如图 12-1-2（a）所示，弹簧下端悬挂一质量为 m 的重物。取此重物的静力平衡位置为计算位移 y 的原点，并规定位移 y 和质点所受的力都以向下为正。

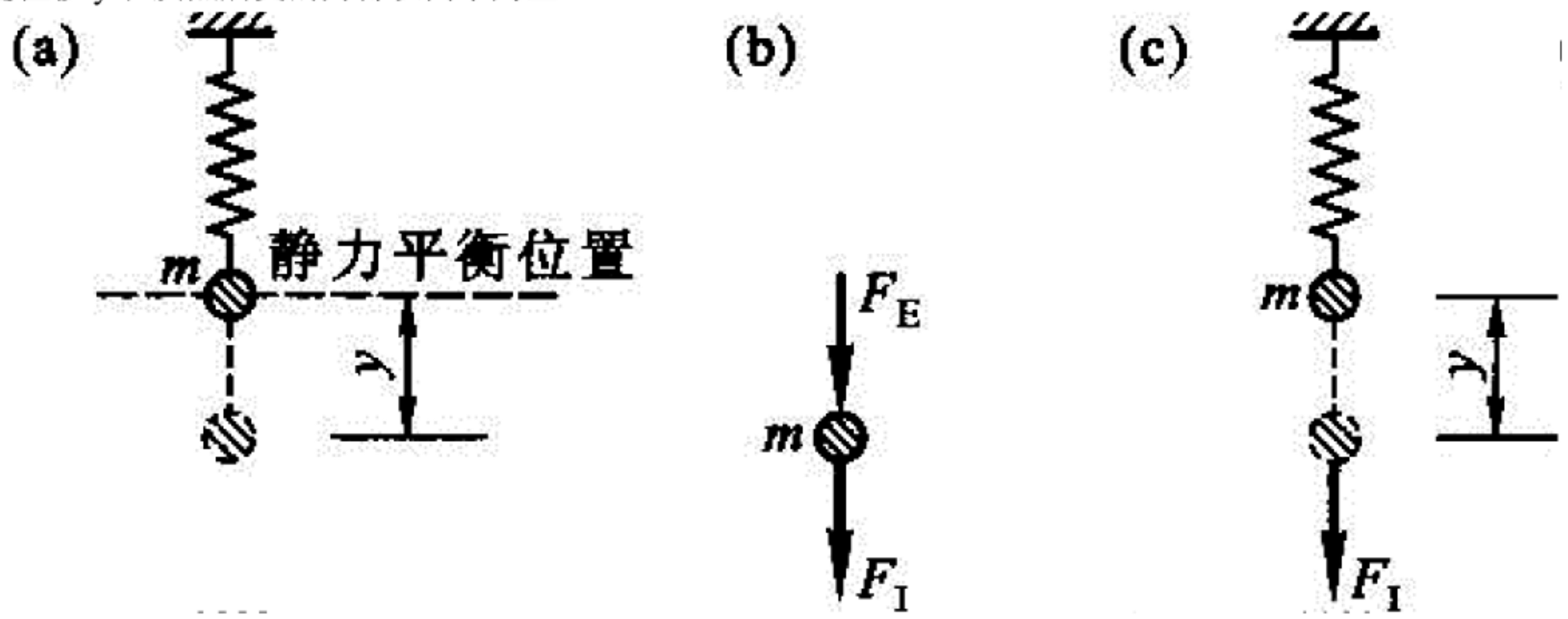


图 12-1-2

（1）刚度系数与柔度系数

①刚度系数

弹簧的刚度系数是指弹簧发生单位位移时所需加的力，简称刚度，用符号 k_{11} 表示。

②柔度系数

弹簧的柔度系数是指弹簧在单位力作用下所产生的位移，简称柔度，用符号 δ_{11} 表示。

③两者关系

$$k_{11}=\frac{1}{\delta_{11}}$$

（2）建立振动微分方程的方法

①刚度法

a．定义

刚度法是指通过列力平衡方程来建立振动微分方程的方法。

b．具体步骤

设质点 m 在振动中的任一时刻位移为 y，取该质点为隔离体（图 12-1-2（b））。

第一，减去初拉力的弹簧拉力

$$F_E=-k_{11}y$$

式中：负号表示其实际方向与位移 y 的方向相反，亦即永远指向静力平衡位置。

此力有将质点 m 拉回到静力平衡位置的趋势，故又称为恢复力。

第二，惯性力

$$F_I=-m\ddot{y}$$

式中，负号表示惯性力的方向总是与加速度 $\ddot{y}=\frac{d^2y}{dt^2}$ 的方向相反。

对于弹簧处于静力平衡位置时的初拉力，与质点的重量 mg 相平衡而抵消，故在振动过程中这两个力都无须考虑。

第三，质点在惯性力 F_I 与弹簧的恢复力 F_E 作用下将维持动力平衡，故应有

$$F_I+F_E=0$$

将 F_I 和 F_E 的算式代入即得

$$m\ddot{y}+k_{11}y=0$$

令

$$\omega^2=\frac{k_{11}}{m}$$

则有

$$\ddot{y}+\omega^2y=0$$

②柔度法

a．定义

柔度法是指通过列位移方程来建立振动微分方程的方法。

b．具体步骤

第一，当质点 m 振动时，把惯性力 $F_I=-m\ddot{y}$ 看作是一个静力荷载作用在体系的质点上，则在其作用下结构在质点处的位移 y 应等于（图 12-1-2（c））

$$y=F_I\delta_{11}=-m\ddot{y}\delta_{11}$$

第二，微分方程为

$$m\ddot{y}+k_{11}y=0$$

（3）单自由度结构在自由振动时的微分方程

①微分方程

$$\ddot{y}+\omega^2y=0$$

②振动方程

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t$$

式中，y_0为初位移；$\dot{y}_0$为初速度。

上式可简化为

$$y = a\sin(\omega t + \varphi)$$

式中

$$a = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{y_0}{\dot{y}_0 / \omega}$$

a 为振幅，表示质点的最大位移；φ 为初相角。

③振动周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

常用单位为 s。

④自振频率

结构的自振频率是指 2π 秒内完成的振动次数，通常用 ω 表示，其单位为 rad / s。

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{11}}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{mg\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{st}}}$$

式中，g 为重力加速度，Δ_{st}为由于重量 mg 所产生的静力位移。

相关结论

a．结构的自振频率只取决于它自身的质量和刚度，它反映着结构固有的动力特性。外部干扰力只能影响振幅和初相角的大小而不能改变结构的自振频率；

b．ω 随Δ_{st}的增大而减小，若把质点安放在结构上产生最大位移处，则可得到最低的自振频率和最大的振动周期。

3．考虑阻尼作用时的自由振动

（1）阻尼力的分类

①外部介质的阻力，例如空气和液体的阻力、支承的摩擦等；

②物体内部的作用，例如材料分子之间的摩擦和黏着性等。

（2）阻尼力的表达式

引用福格第假定，近似认为振动中物体所受的阻尼力与其振动速度成正比，这称为黏滞阻尼力，即

$$F_D = -c\dot{y}$$

式中，c 为阻力系数；负号表示阻尼力F_D的方向恒与速度$\dot{y}$的方向相反。

（3）有阻尼作用的自由振动的微分方程

①当考虑阻尼力时，质点 m 上所受的力将如图 12-1-3 所示，考虑其动力平衡，应有

$$F_I + F_D + F_E = 0$$

即

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k_{11}y = 0$$

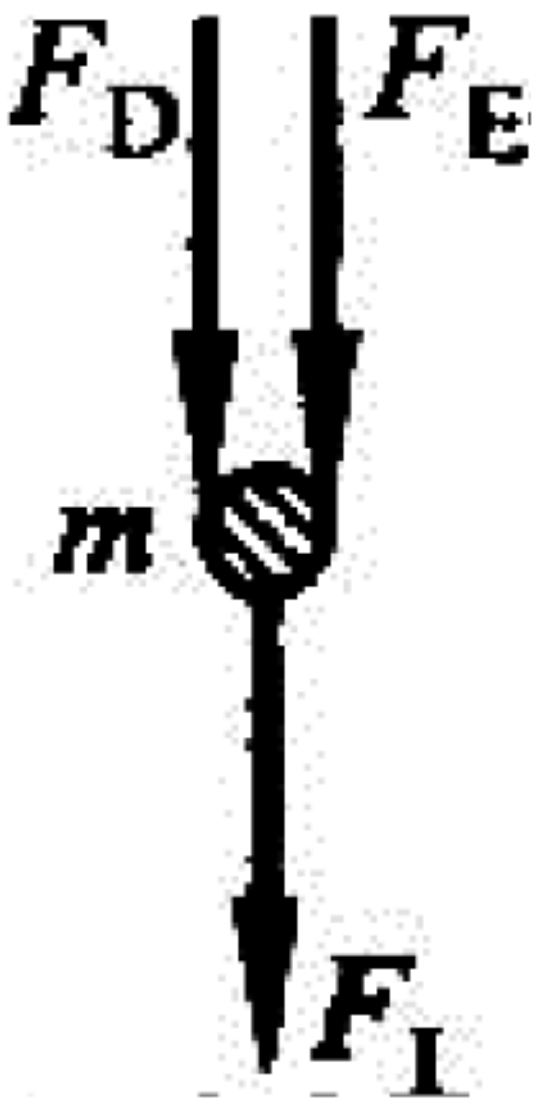


图 12-1-3

令

$$\omega^2=\frac{k_{11}}{m},\ 2\delta=\frac{c}{m}$$

②微分方程为

$$\ddot{y}+2\delta\dot{y}+\omega^2 y=0 \qquad (12\text{-}1)$$

（4）微分方程的解

①微分方程解的形式

$$y=Ce^{rt}$$

代入原微分方程（12-1），可得确定 r 的特征方程 $r^2+2\Delta r+\omega^2=0$ 其两个根为

$$r_{1,2}=-\delta\pm\sqrt{\delta^2-\omega^2}$$

②当 δ<ω 时，即欠阻尼情况

a．微分方程的解

$$y=e^{-\delta t}\left(y_0\cos\omega' t+\frac{\dot{y}_0+\delta y_0}{\omega'}\sin\omega' t\right)$$

式中，ω' 为有阻尼自振频率，其表达式如下

$$\omega'=\sqrt{\omega^2-\delta^2} \qquad (12\text{-}2)$$

上式也可写为

$$y=Ae^{-\Delta t}\sin(\omega' t+\varphi') \qquad (12\text{-}3)$$

其中

$$A=\sqrt{y_0^2+\left(\frac{\dot{y}_0+\delta y_0}{\omega'}\right)^2}$$

$$\tan\varphi'=\frac{\omega' y_0}{\dot{y}_0+\delta y_0}$$

b．振动曲线

式（12-3）的位移——时间曲线如图 12-1-4 所示。

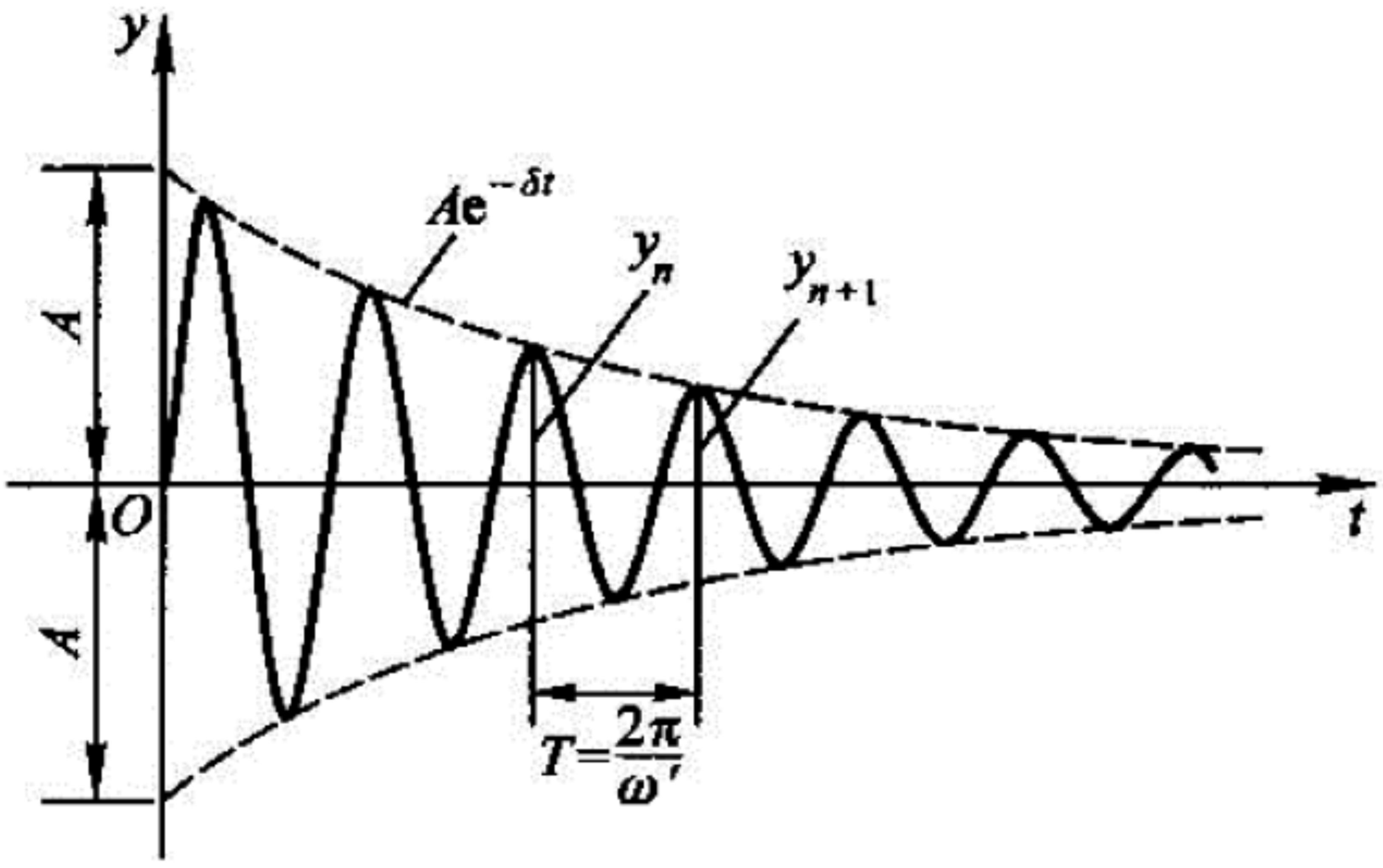


图 12-1-4

c．阻尼比

$$\xi=\frac{\delta}{\omega}$$

d．有阻尼自振频率表达式

$$\omega'=\omega\sqrt{1-\xi^2}$$

可见 ω'随阻尼的增大而减小。

③当 δ>ω 时，即过阻尼情况

此时特征根 r_1、r_2 为两个负实数，式（12-1）的通解为

$$y=e^{-\delta t}\left(C_1\cosh\sqrt{\delta^2-\omega^2}\,t+C_2\sinh\sqrt{\delta^2-\omega^2}\,t\right)$$

这是非周期函数，因此不会产生振动，结构受初始干扰偏离平衡位置后将缓慢地回复到原有位置。

④当 δ=ω 时，即临界阻尼情况

a．微分方程的通解

此时特征根是一对重根，$r_{1,2}=-\delta$，式（12-1）的通解为

$$y=e^{-\delta t}(C_1+C_2t)$$

这也是非周期函数，故也不发生振动。这是由振动过渡到非振动状态之间的临界情况，此时阻尼比 ξ=1。

b．临界阻力系数

此时的 c 值称为临界阻力系数，用 c_{cr} 表示。

在式 $2\delta=\frac{c}{m}$ 中令 δ=ω 可得

$$c_{cr}=2m\omega$$

又因为 $\xi=\frac{\delta}{\omega}$，可以得到

$$\xi=\frac{c}{c_{cr}}$$

表明阻尼比 ξ 即为阻力系数 c 与临界阻力系数 c_{cr} 之比。

四、单自由度结构在简谐荷载作用下的受迫振动

1．单自由度结构在简谐荷载作用下的受迫振动

（1）微分方程

若干扰力 F（t）直接作用在质点 m 上，则质点受力将如图 12-1-5 所示。

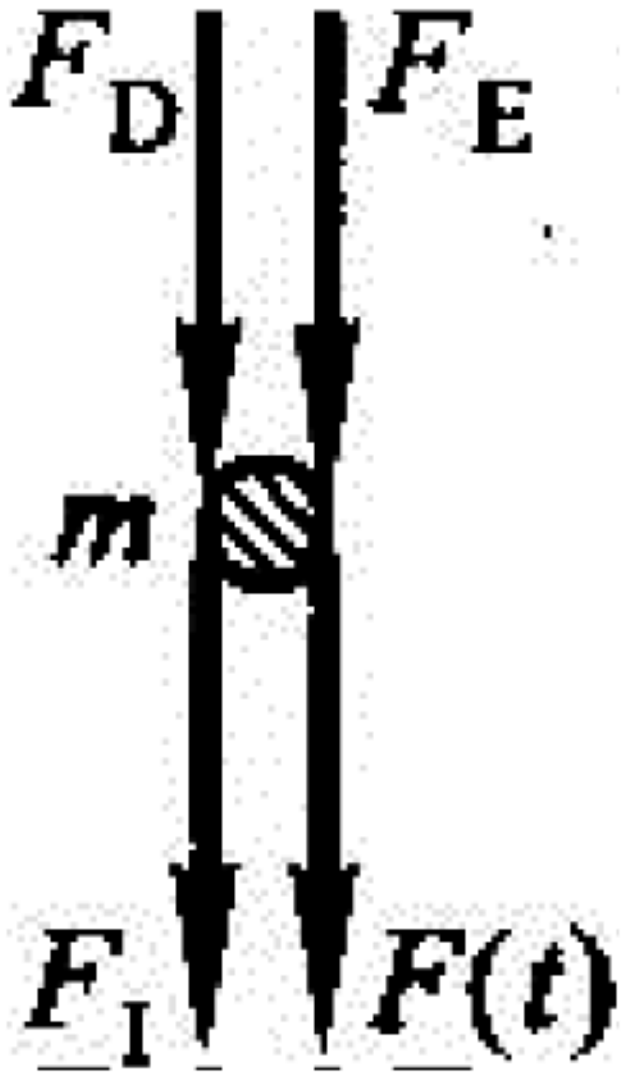


图 12-1-5

由动力平衡条件得

$$F_I + F_D + F_E + F(t) = 0$$

即

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k_{11}y = F(t)$$

或

$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2 y = \frac{1}{m}F(t)$$

（2）微分方程的解

①解的组成部分

a．一部分为相应齐次方程的通解 y^0

$$y^0 = e^{-\xi\omega t}(B_1\cos\omega' t + B_2\sin\omega' t)$$

b．另一部分则是与干扰力 F（t）相适应的特解 $\overline{y}$

它将随干扰力的不同而异。

②求解过程

a．令

$$F(t) = F\sin\theta t$$

式中，θ 为干扰力的频率；F 为干扰力的最大值。

此时振动微分方程式为

$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2 y = \frac{F}{m}\sin\theta t$$

b．设振动微分方程有一个特解为

$$\overline{y} = C_1\sin\theta t + C_2\cos\theta t$$

代入振动微分方程，可以解出

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\omega^2 - \theta^2)F}{m[(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\theta^2]} \\ C_2 &= -\frac{2\xi\omega\theta F}{m[(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\theta^2]} \end{aligned}\right\}$$

c．则振动微分方程通解为

$$y = e^{-\xi\omega t}[B_1\cos\omega' t + B_2\sin\omega' t] + \frac{F}{m[(\omega^2-\theta^2)^2+4\xi^2\omega^2\theta^2]}[(\omega^2-\theta^2)\sin\theta t - 2\xi\omega\theta\cos\theta t]$$

d．式中 B_1 和 B_2 取决于初始条件

设当 t＝0 时，$y=y_0$，$\dot{y}=\dot{y}_0$，可求得

$$B_1 = y_0 + \frac{2\xi\omega\theta F}{m[(\omega^2-\theta^2)^2+4\xi^2\omega^2\theta^2]}$$

$$B_2 = \frac{\dot{y}_0+\xi\omega y_0}{\omega'} + \frac{2\xi^2\omega^2\theta F}{m\omega'[(\omega^2-\theta^2)^2+4\xi^2\omega^2\theta^2]} - \frac{\theta(\omega^2-\theta^2)F}{m\omega'[(\omega^2-\theta^2)^2+4\xi^2\omega^2\theta^2]}$$

则

$$y = e^{-\xi\omega t}\left[y_0\cos\omega' t + \frac{\dot{y}_0+\xi\omega y_0}{\omega'}\sin\omega' t\right] + e^{-\xi\omega t}\frac{\theta F}{m[(\omega^2-\theta^2)^2+4\xi^2\omega^2\theta^2]}\left[2\xi\omega\cos\omega' t + \frac{2\xi^2\omega^2-(\omega^2-\theta^2)}{\omega'}\sin\omega' t\right] + \frac{F}{m[(\omega^2-\theta^2)^2+4\xi^2\omega^2\theta^2]}[(\omega^2-\theta^2)\sin\theta t - 2\xi\omega\theta\cos\theta t] \tag{12-4}$$

（3）振动系组成

①自由振动

自由振动是由初始条件决定的。

②伴生自由振动

伴生自由振动是与初始条件无关而伴随干扰力的作用发生的振动，但其频率与体系的自振频率 ω'一致。

③纯受迫振动

由于这两部分振动都含有因子 $e^{-\xi\omega t}$ 故它们将随时间的推移而很快衰减掉，最后只剩下按干扰力频率 θ 而振动的第三部分，称为纯受迫振动或稳态受迫振动（图 12-1-6）。

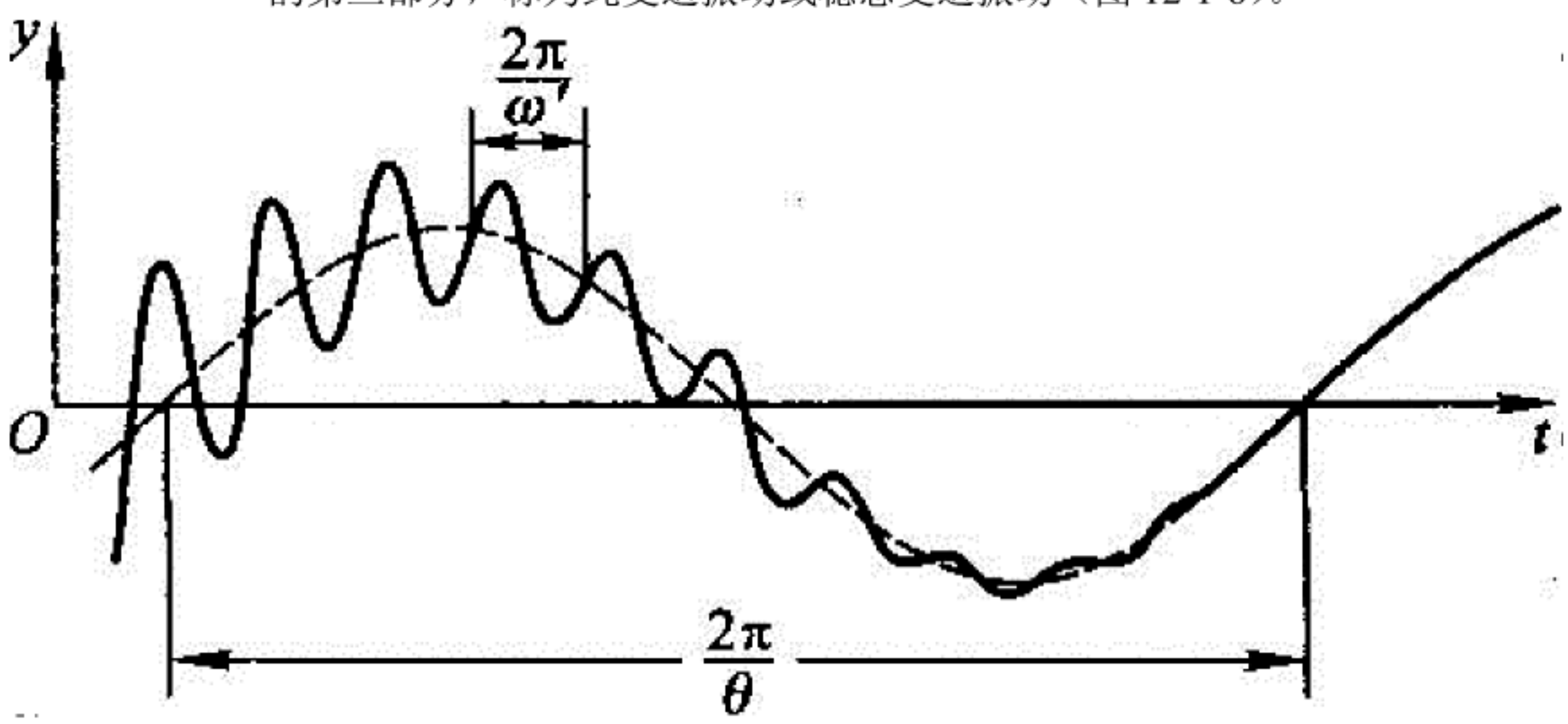


图 12-1-6

（4）过渡阶段与平稳阶段

①过渡阶段

过渡阶段是指振动开始的一段时间内几种振动同时存在的阶段。

②平稳阶段

平稳阶段是指剩下纯受迫振动的阶段。

2．不考虑阻尼的纯受迫振动

（1）振动方程

此时因 ξ＝0，由式（12-4）的第三项可知纯受迫振动方程成为

$$y = \frac{F}{m(\omega^2 - \theta^2)} \sin \theta t$$

（2）振幅

最大的动力位移（即振幅）为

$$A = \frac{F}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \frac{F}{m\omega^2}$$

又因为

$$\omega^2 = \frac{k_{11}}{m} = \frac{1}{m\delta_{11}}$$

代入上式，得

$$A = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} F\delta_{11} = \mu y_{st}$$

式中，$y_{st} = F\delta_{11}$ 为振动荷载的最大值 F 作为静力荷载作用于结构上时所引起的静力位移；μ 为最大的动力位移与静力位移之比值，称为位移动力因数，其计算表达如下

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = \frac{A}{y_{st}}$$

a．当 θ＜ω 时，μ 为正，动力位移与动力荷载同向；

b．当 θ＞ω 时，μ 为负，动力位移与动力荷载反向。

（3）无阻尼的纯强迫振动系统特点

①当干扰力的频率 θ 接近于结构的自振频率 ω 时，动力因数就迅速增大；

②当二者无限接近时，理论上 μ 将成为无穷大，此时内力和位移都将无限增加；

③当 θ＝ω 时，结构发生共振。

3．考虑阻尼的纯受迫振动

（1）振动方程

取式（12-4）的第三项，并令

$$\left.\begin{aligned} \frac{(\omega^2 - \theta^2)F}{m[(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\theta^2]} &= A\cos\varphi \\ -\frac{2\xi\omega\theta F}{m[(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\theta^2]} &= -A\sin\varphi \end{aligned}\right\}$$

则将有

$$y = A\sin(\theta t - \varphi)$$

式中，A 为有阻尼的纯受迫振动的振幅；φ 为位移与荷载之间的相位差。

振幅 $A = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\theta^2}} \frac{F}{m}$

相位差 $\varphi = \arctan\left(\frac{2\xi\omega\theta}{\omega^2 - \theta^2}\right)$

（2）动力因数

振幅 A 可写为

$$A = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\theta^2}{\omega^2}}} \frac{F}{m\omega^2} = \mu y_{st}$$

则动力因数为

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\theta^2}{\omega^2}}}$$

（3）动力因素和相位差比值大小的影响

动力因数 μ 与 θ 和 ω 的比值以及阻尼比 ξ 的关系曲线如图 12-1-7 所示。相位差 φ 与 θ 和 ω 的比值以及阻尼比 ξ 的关系曲线如图 12-1-8 所示。

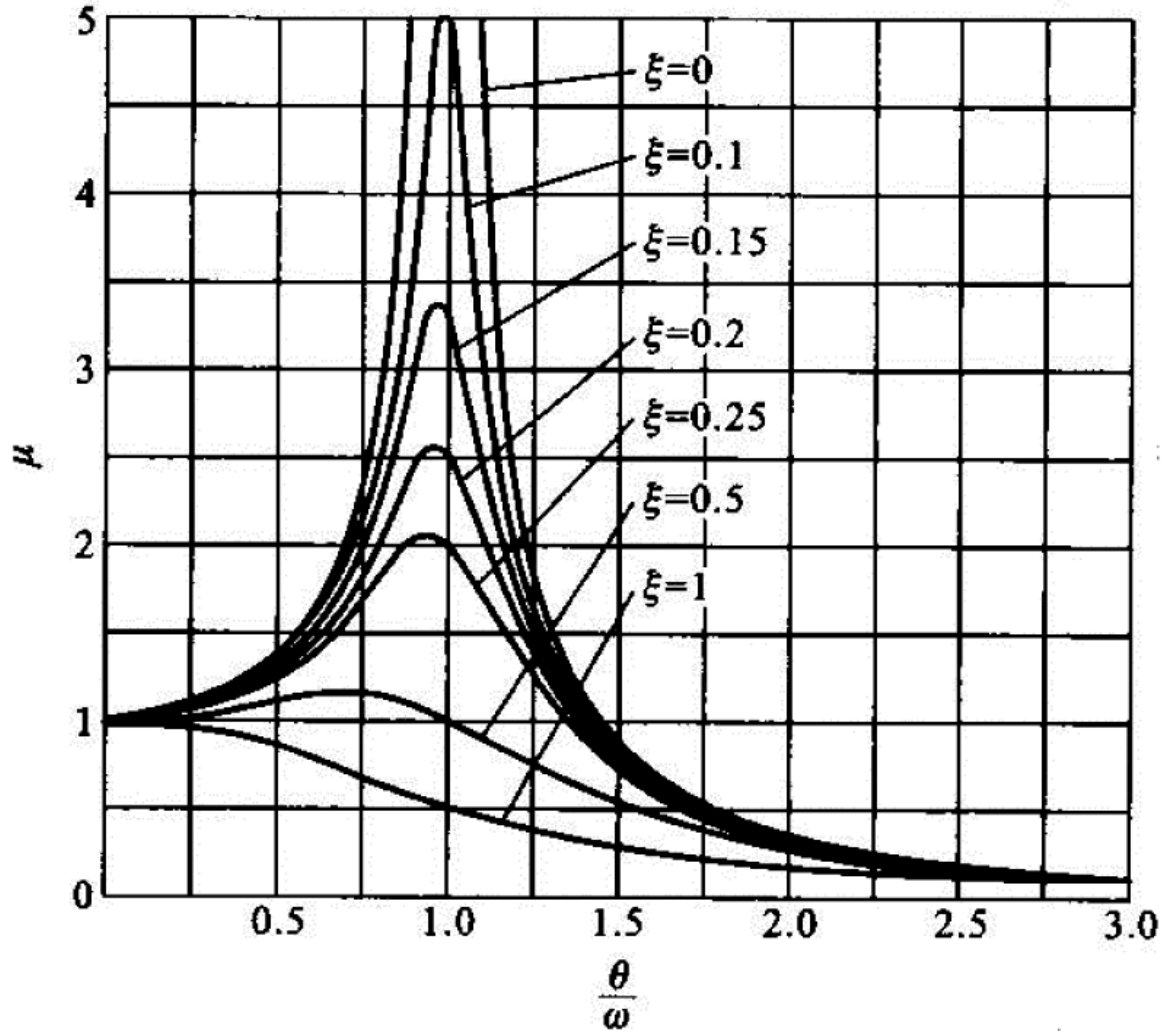


图 12-1-7

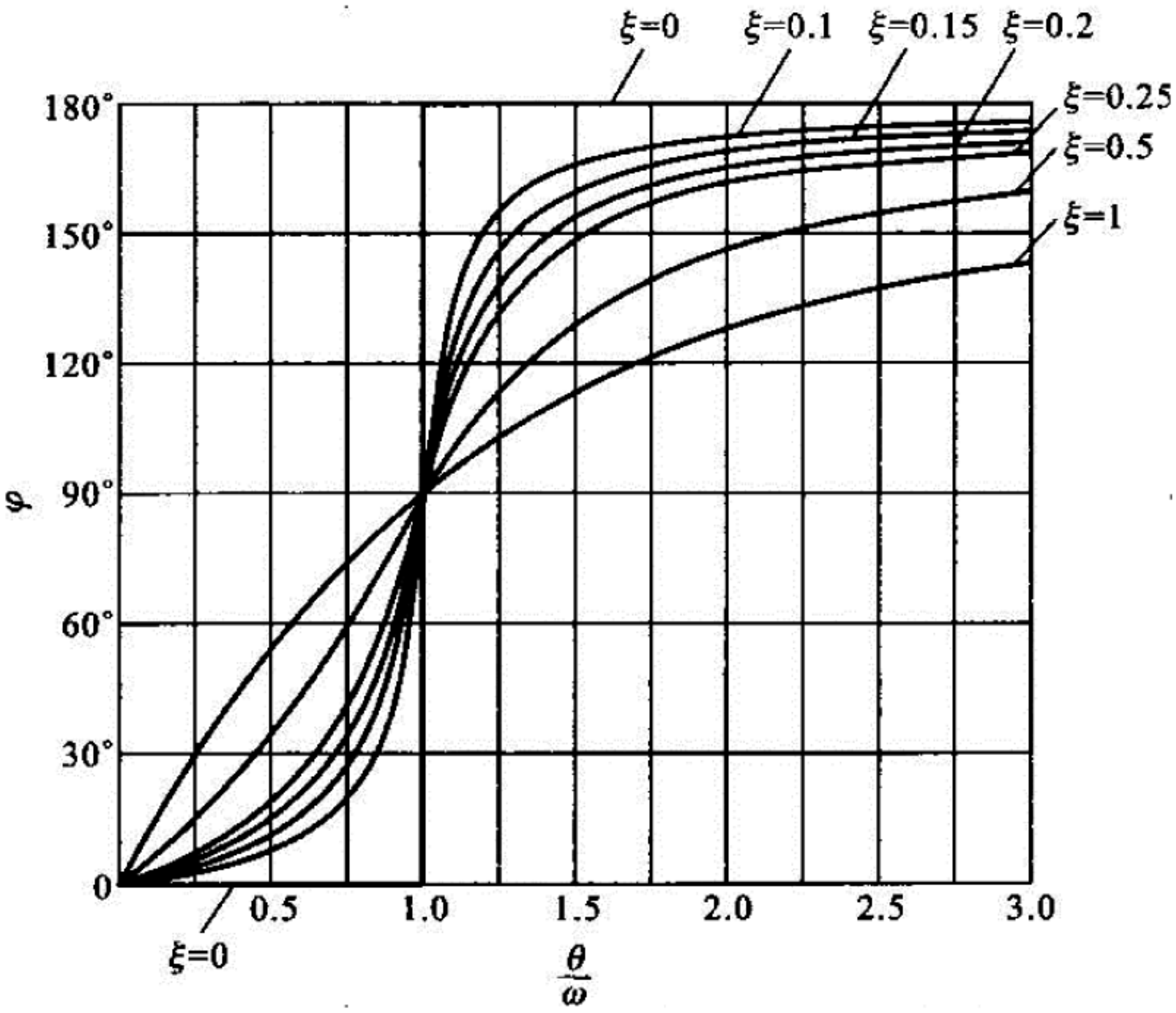


图 12-1-8

①当 θ 远小于 ω 时

$\frac{\theta}{\omega}$很小，μ 接近于 1，相位差 φ 也很小。振动很慢，惯性力和阻尼力都很小。动力荷载主要由结构的恢复力所平衡。

②当 θ 远大于 ω 时

μ 很小，质点近似于不动或只作振幅很微小的颤动。振动很快，惯性力很大，结构的恢复力和阻尼力相对可以忽略，动力荷载主要由惯性力来平衡。此时相位差 φ≈180°。

③当 θ 接近于 ω 时

μ 增加很快。此时 φ≈90°，恢复力和惯性力都很小，动力荷载主要由阻尼力平衡。μ 值受阻尼大小的影响。由图 12-1-7 可见，在该范围内，阻尼影响将大大地减小受迫振动的位移。

④当 θ→ω 时

由于阻尼力的存在，μ 值虽不等于无穷大，但其值还是很大的，特别是当阻尼作用较小时，共振现象仍是很危险的，可能导致结构的破坏。

五、单自由度结构在任意荷载作用下的受迫振动

1．瞬时冲量作用于质点 m

（1）瞬时冲量

瞬时冲量是指荷载只在极短的时间内给予振动物体的冲量。

如图 12-1-9（a）所示，设荷载的大小为 F，作用的时间为Δt，则其冲量以 I＝FΔt，即图中阴影线所表示的面积。

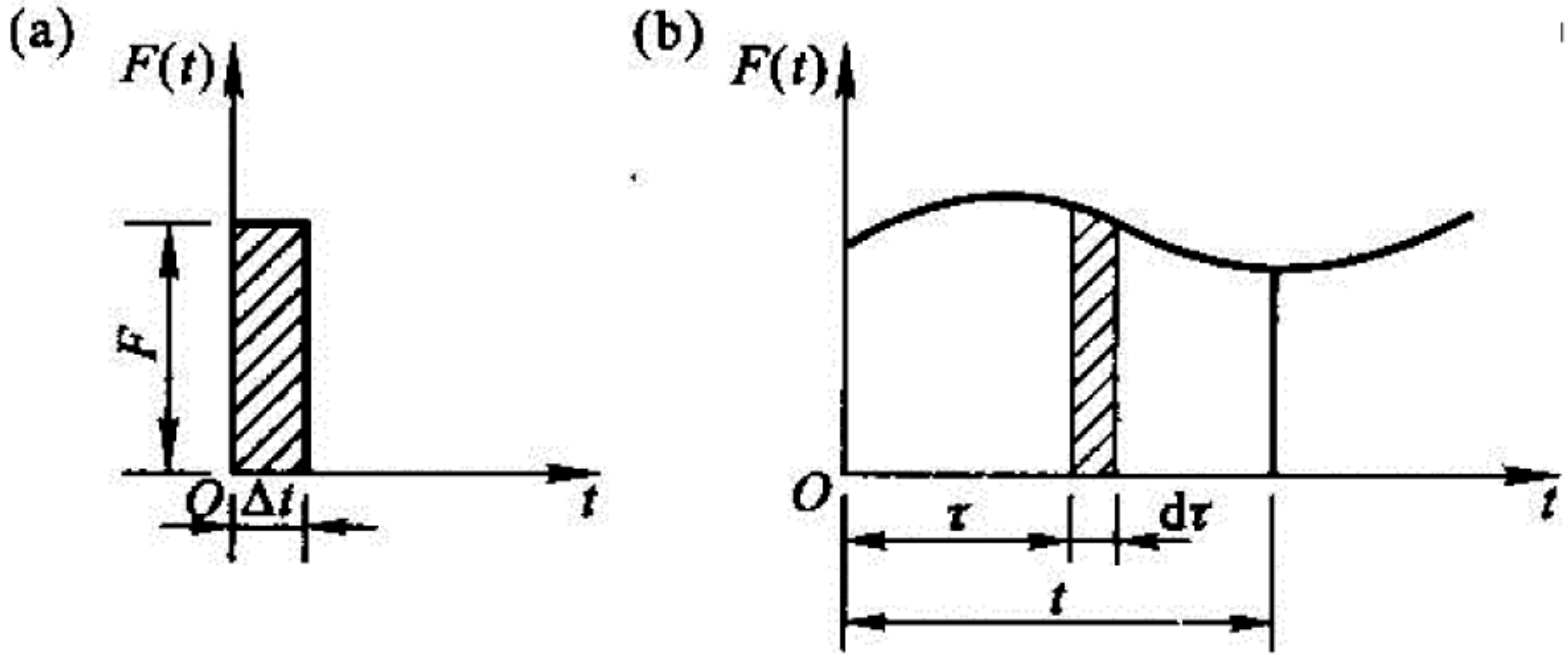


图 12-1-9

（2）瞬时冲量作用下质点的位移方程

①在 t＝0 时，冲量 I 作用于单自由度质点

设质点的原位移和原速度均为零，在 t＝0 时，有冲量 I 作用于单自由度质点上，使质点获得初速度$\dot{y}_0$，但初位移仍未零，即 $y_0=0$ 和$\dot{y}_0=\dfrac{I}{m}$。

瞬时冲量作用下质点 m 的位移方程为

$$y=e^{-\xi\omega t}\left(\frac{\dot{y}_0}{\omega'}\sin\omega' t\right)=\frac{I}{m\omega'}e^{-\xi\omega t}\sin\omega' t$$

②在 t＝τ 时，冲量 I 作用于单自由度质点

瞬时冲量在 t＝τ 时加于质点上，则其位移方程应为

$$y(t)=\frac{I}{m\omega'}e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega'(t-\tau)\quad(t>\tau)$$

2．单自由度结构在任意动力载荷作用下的质点位移公式

（1）质点初速度和初位移均为零

①考虑阻尼

对于图 12-1-9（b）所示一般形式的干扰力 F（t），可以认为它是一系列微小冲量 F（τ）dτ 连续作用的结果，因此应有

$$y(t)=\frac{1}{m\omega'}\int_0^t F(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega'(t-\tau)d\tau\quad(12\text{-}5)$$

②不考虑阻尼

若不考虑阻尼，则有 ξ＝0，ω'＝ω，于是

$$y(t)=\frac{1}{m\omega}\int_0^t F(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau\quad(12\text{-}6)$$

式（12-5）及式（12-6）又称杜哈梅积分。

（2）质点初速度和初位移不为零

①考虑阻尼

若在 t＝0 时，质点原来还具有初始位移 y_0 和初始速度$\dot{y}_0$，则质点位移应为

$$y(t)=e^{-\xi\omega t}\left(y_0\cos\omega' t+\frac{\dot{y}_0+\xi\omega y_0}{\omega'}\sin\omega' t\right)+\frac{1}{m\omega'}\int_0^t F(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega'(t-\tau)d\tau$$

②不考虑阻尼

如不考虑阻尼则有

$$y(t)=y_0\cos\omega t+\frac{y_0}{\omega}\sin\omega t+\frac{1}{m\omega}\int_0^t F(\tau)\sin\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

3．两种特殊载荷作用下的质点位移公式

（1）突加荷载作用质点

在 t＝0 时，大小为 F 的力作用质点，并保持常量继续作用，以加载那一瞬间作为时间的起点，其变化规律如图 12-1-10（a）所示。

①考虑阻尼

a．质点位移公式

将 F（τ）＝F 代入式（12-5）进行积分求得

$$y=\frac{F}{m\omega^2}\left[1-\mathrm{e}^{-\xi\omega t}\left(\cos\omega' t+\frac{\xi\omega}{\omega'}\sin\omega' t\right)\right]$$

$$=y_{st}\left[1-\mathrm{e}^{-\xi\omega t}\left(\cos\omega' t+\frac{\xi\omega}{\omega'}\sin\omega' t\right)\right]$$

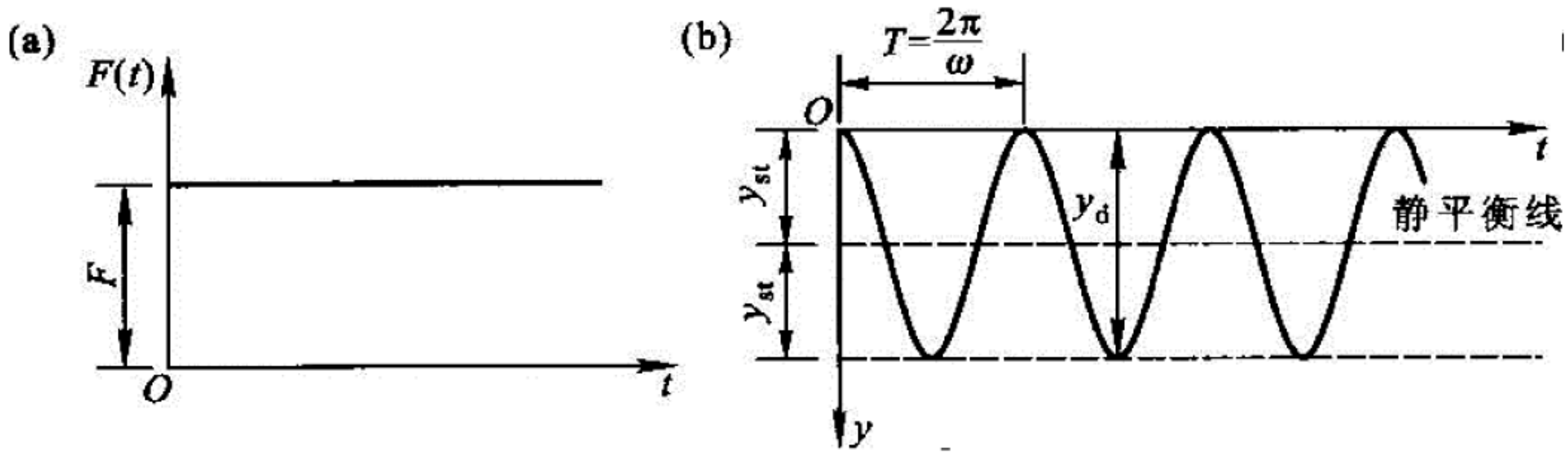


图 12-1-10

b．最大动力位移

将此式对 t 求一阶导数，并令其等于零。即可求得产生位移极值的各时刻。当$t=\frac{\pi}{\omega'}$时，最大动力位移 y_d 为

$$y_d=y_{st}\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{\xi\omega\pi}{\omega'}}\right)$$

c．动力因数

$$\mu=1+\mathrm{e}^{-\frac{\xi\omega\pi}{\omega'}}$$

②不考虑阻尼

若不考虑阻尼影响，则 ξ＝0，ω'＝ω。

a．质点位移公式

$$y=\frac{F}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)=y_{st}(1-\cos\omega t)$$

其图形如图 12-1-10（b）所示。

b．最大动位移

$$y_d=2y_{st}$$

即在突加荷载作用下，最大动力位移为静力位移的 2 倍。

（2）短期荷载作用质点

在 t＝0 时，荷载突然加于结构上，但到 $t=t_0$ 时，荷载又突然消失，如图 12-1-11 所示。且不考虑阻尼影响。

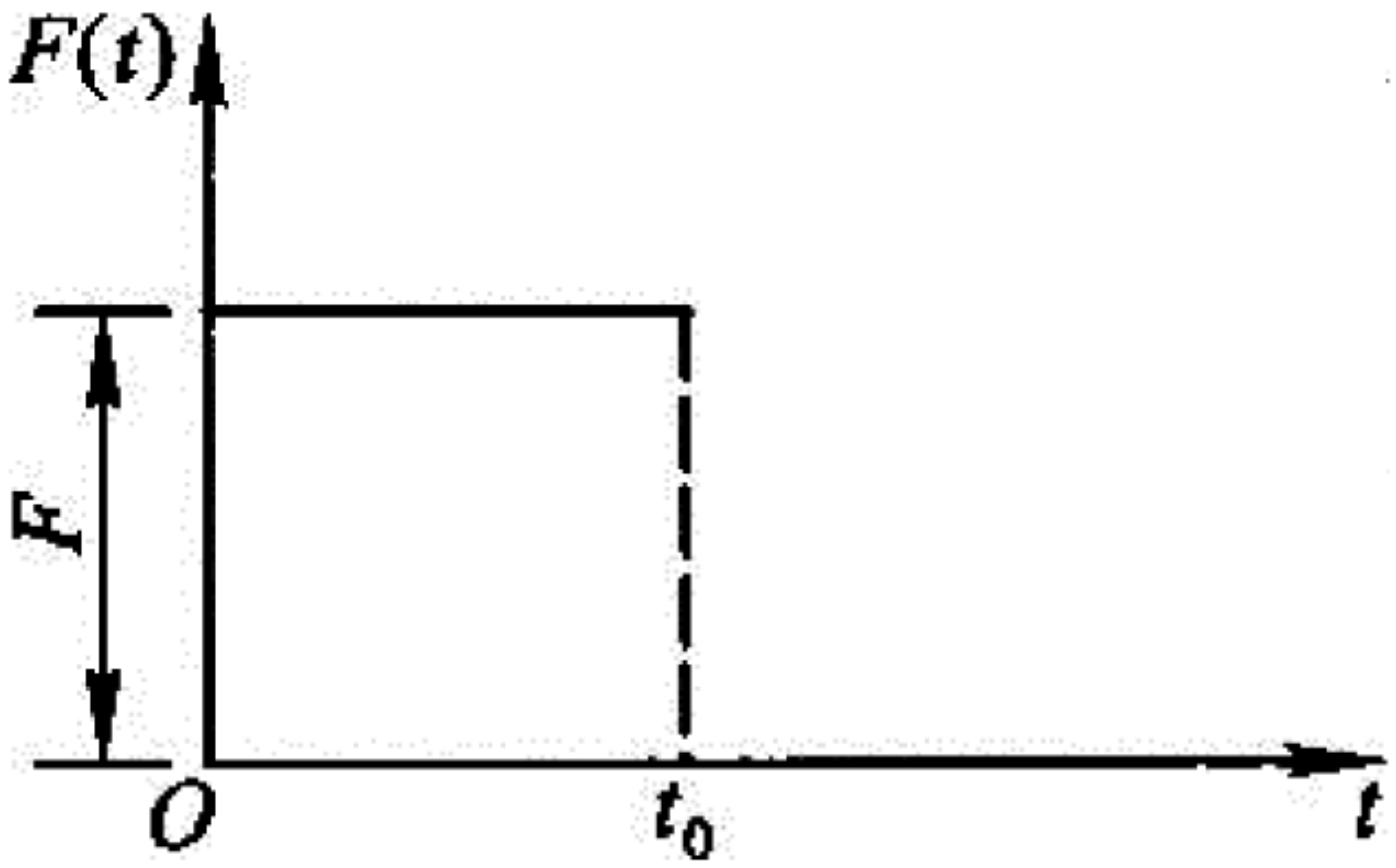


图 12-1-11

①质点位移公式

对于这种情况可作如下分析：当 t＝0 时有上面所述的突加荷载加入，并一直作用于结构上；到 $t=t_0$ 时，又有一个大小相等但方向相反的突加荷载加入，以抵消原有荷载的作用。可利用上述突加荷载作用下的计算公式按叠加法来求解。

a．当 $0<t<t_0$ 时，则

$$y=y_{st}(1-\cos\omega t)$$

b．当 $t>t_0$ 时，则

$$\begin{aligned} y &= y_{st}(1-\cos\omega t)-y_{st}[1-\cos\omega(t-t_0)] \\ &= y_{st}[\cos\omega(t-t_0)-\cos\omega t] \\ &= 2y_{st}\left[\sin\frac{\omega t_0}{2}\sin\omega\left(t-\frac{t_0}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

前一阶段（$0<t<t_0$）与前述突加荷载作用下的情况相同；后一阶段（$t>t_0$）则为自由振动。

②质点最大位移

a．$t_0<\dfrac{T}{2}$时

最大位移发生在后一阶段。当$\left(t-\dfrac{t_0}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2\omega}$时有最大位移，其值为

$$y_d=2y_{st}\sin\frac{\omega t_0}{2}$$

相应的动力因数为

$$\mu=2\sin\frac{\omega t_0}{2}$$

b．当$t_0>\dfrac{T}{2}$时

最大位移将发生在前一阶段，$y_d=2y_{st}$，相应的动力因数 $\mu=2$。

六、多自由度结构的自由振动

1．振动微分方程的建立

图 12-1-12（a）所示无重量简支梁支承着 n 个集中质量 m_1，m_2，…，m_n，略去梁的轴向变形和质点的转动，则为 n 个自由度的结构。设在振动中任一时刻各质点的位移分别为 y_1，y_2，…，y_n。

（1）按刚度法建立振动微分方程

①处理方法

a．首先加入附加链杆阻止所有质点的位移（图 12-1-12（b）），则在各质点的惯性力 $-m_i\ddot{y}_i$（i＝1，2，…，n）作用下，各链杆的反力等于 $m_i\ddot{y}_i$；

b．其次令各链杆发生与各质点实际位置相同的位移（图 12-1-12（c）），此时各链杆上所需施加的力为 F_{Ri}（i＝1，2，…，n）。

②质点的动力平衡方程

若不考虑各质点所受的阻尼力，各附加链杆上的总反力应等于零，由此便可列出各质点的动力平衡方程。以质点 m_i 为例，有

$$m_i\ddot{y}_i + F_{Ri} = 0$$

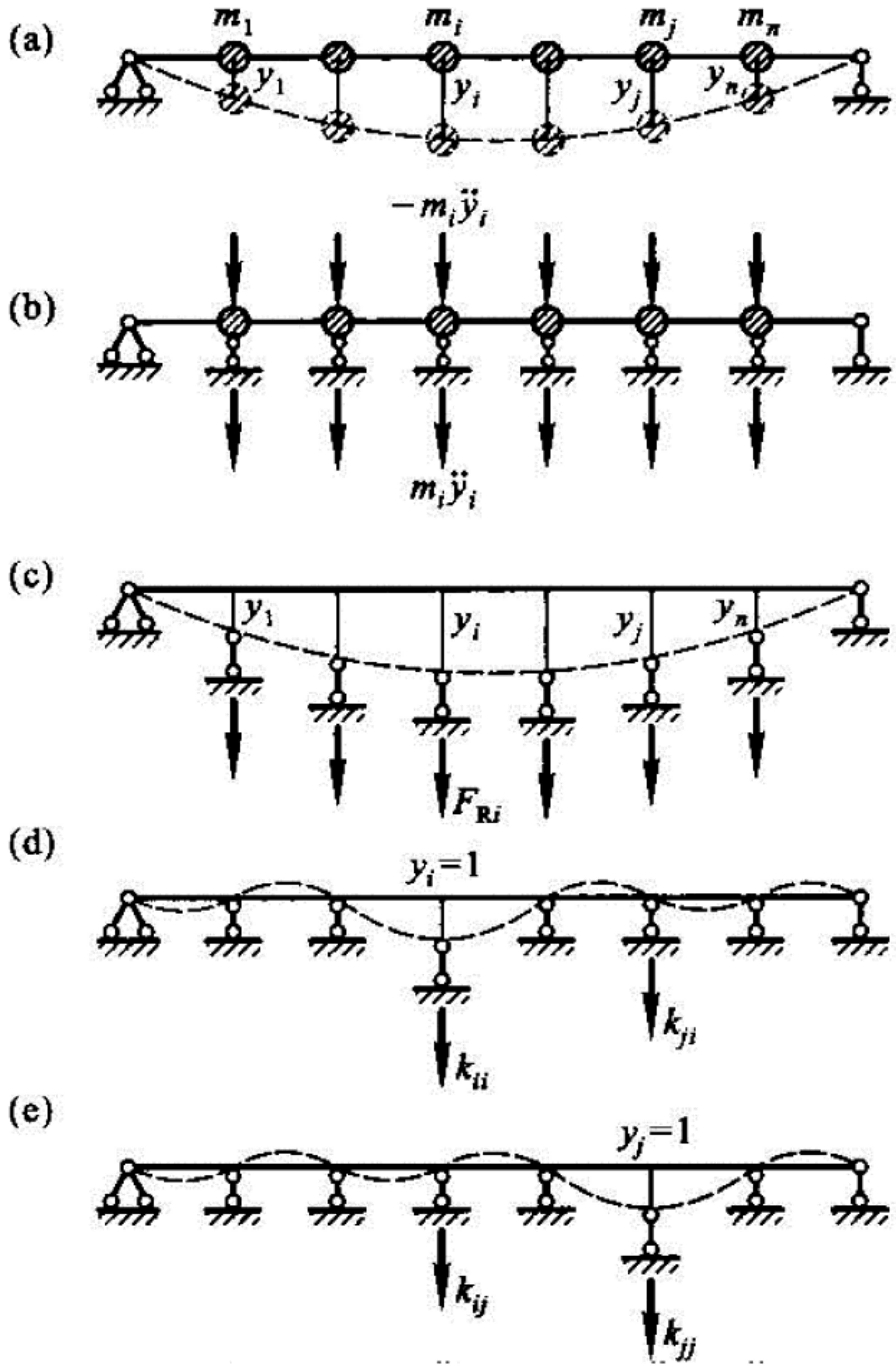


图 12-1-12

③求 F_{Ri}

F_{Ri} 的大小取决于结构的刚度和各质点的位移值，由叠加原理，它可写为

$$F_{Ri}=k_{i1}y_1+k_{i2}y_2+\ldots+k_{ii}y_i+\ldots+k_{ij}yj+\ldots+k_{in}y_n$$

式中，k_{ii}、k_{ij} 等为结构的刚度系数，它们物理意义见图 12-1-12（d）、（e）。例如 k_{ij} 为 J 点发生单位位移（其余各点位移均为零）时 i 点处附加链杆的反力。

则

$$m_i\ddot{y}_i + k_{i1}y_1 + k_{i2}y_2 + \cdots + k_{in}y_n = 0$$

④多自由度结构的无阻尼自由振动微分方程

对每个质点都列出这样一个动力平衡方程，于是可建立 n 个方程如下

$$\left.\begin{array}{c} m_1\ddot{y}_1 + k_{11}y_1 + k_{12}y_2 + \cdots + k_{1n}y_n = 0 \\ m_2\ddot{y}_2 + k_{21}y_1 + k_{22}y_2 + \cdots + k_{2n}y_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n\ddot{y}_n + k_{n1}y_1 + k_{n2}y_2 + \cdots + k_{nn}y_n = 0 \end{array}\right\}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \vdots \\ \ddot{y}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

或简写为

$$M\ddot{Y} + KY = 0 \tag{12-7}$$

式中，M 为质量矩阵，在集中质量的结构中它是对角矩阵；K 为刚度矩阵，根据反力互等定理，它是对称矩阵；$\ddot{Y}$ 为加速度列向量；Y 为位移列向量。

（2）按柔度法建立振动微分方程

如果按柔度法来建立振动微分方程，则可将各质点的惯性力看作是静力荷载（图 12-1-13（a）），在这些荷载作用下，结构上任一质点 m_i 处的位移应为

$$y_i = \delta_{i1}(-m_1\ddot{y}_1) + \delta_{i2}(-m_2\ddot{y}_2) + \cdots + \delta_{ii}(-m_i\ddot{y}_i) + \cdots + \delta_{ij}(-m_j\ddot{y}_j) + \cdots + \delta_{in}(-m_n\ddot{y}_n)$$

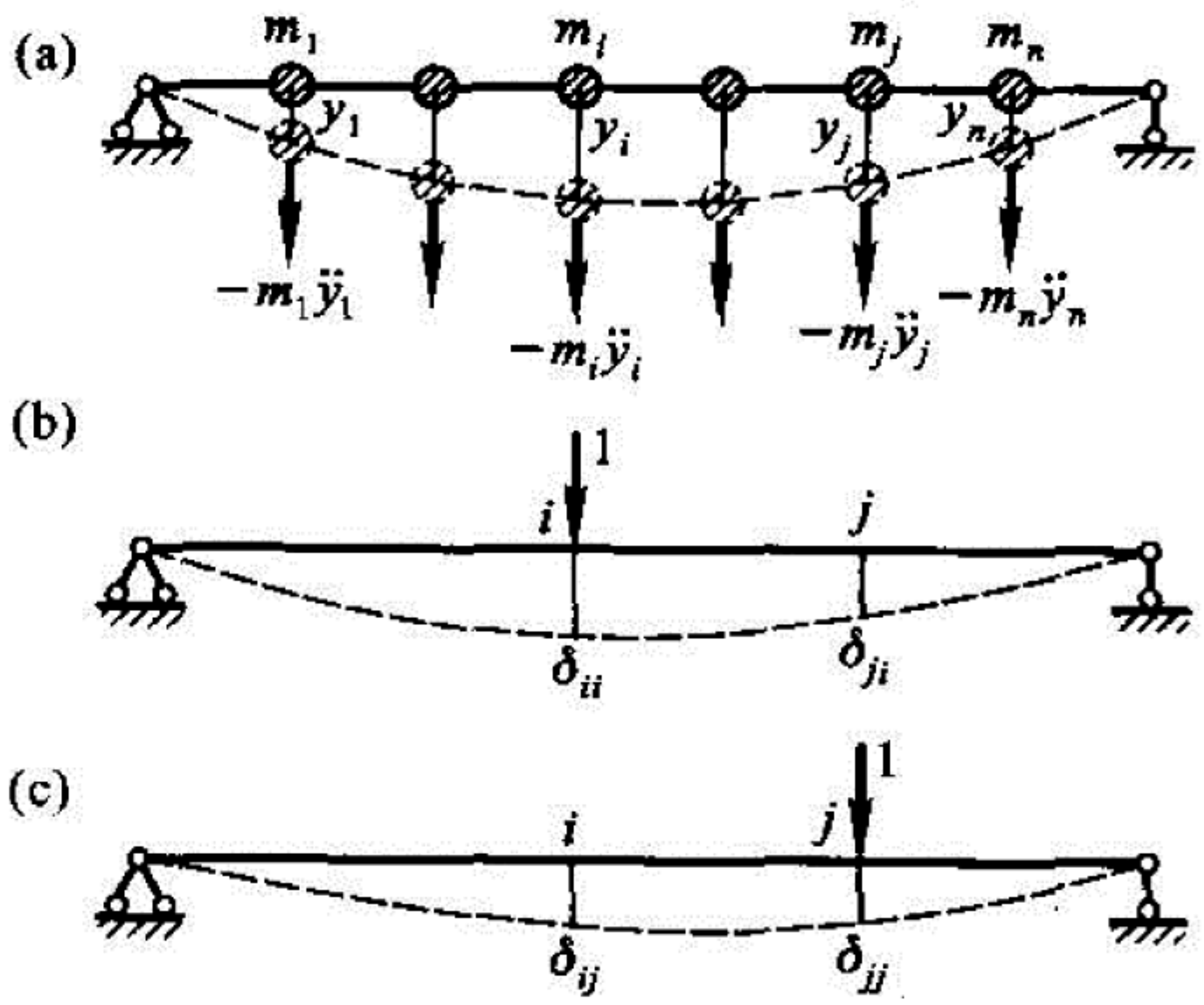


图 12-1-13

式中，δ_{ii}、δ_{ij} 等为结构的柔度系数，它们的物理意义见图 12-1-13（b）、（c）所示。

建立 n 个位移方程

$$\left.\begin{aligned} y_1+\delta_{11}m_1\ddot{y}_1+\delta_{12}m_2\ddot{y}_2+\cdots+\delta_{1n}m_n\ddot{y}_n=0 \\ y_2+\delta_{21}m_1\ddot{y}_1+\delta_{22}m_2\ddot{y}_2+\cdots+\delta_{2n}m_n\ddot{y}_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n+\delta_{n1}m_1\ddot{y}_1+\delta_{n2}m_2\ddot{y}_2+\cdots+\delta_{nn}m_n\ddot{y}_n=0 \end{aligned}\right\} \tag{12-8}$$

写成矩阵形式，就有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \vdots \\ \ddot{y}_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

或简写为

$$\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{\delta M}\ddot{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{0} \tag{12-9}$$

式中，δ 为结构的柔度矩阵，根据位移互等定理，它是对称矩阵。

（3）刚度矩阵与柔度矩阵的关系

若对式（12-9）左乘以 δ^{-1}，则有

$$\boldsymbol{\delta}^{-1}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{0}$$

与式（12-7）对比，显然应有

$$\delta^{-1}=K$$

即柔度矩阵和刚度矩阵是互为逆阵的。

2．按柔度法求解

（1）特解形式

设按柔度法建立的振动微分方程的特解取如下形式

$$y_i=A_i\sin(\omega t+\varphi)\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

设所有质点都按同一频率同一相位作同步简谐振动，但各质点的振幅值各不相同。

（2）求自振频率 ω

①求解过程

a．将特解代入式（12-8）并消去公因子 $\sin(\omega t+\varphi)$ 可得

$$\left.\begin{aligned} \left(\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega^2}\right)A_1+\delta_{12}m_2A_2+\cdots+\delta_{1n}m_nA_n=0 \\ \delta_{21}m_1A_1+\left(\delta_{22}m_2-\frac{1}{\omega^2}\right)A_2+\cdots+\delta_{2n}m_nA_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{n1}m_1A_1+\delta_{n2}m_2A_2+\cdots+\left(\delta_{nn}m_n-\frac{1}{\omega^2}\right)A_n=0 \end{aligned}\right\} \tag{12-10}$$

写成矩阵形式则为

$$\left(\boldsymbol{\delta M}-\frac{1}{\omega^2}\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0} \tag{12-11}$$

式中，$A=(A_1A_2\ldots A_n)^T$ 为振幅列向量；I 为单位矩阵。

b．要得到 A_1，A_2，…，A_n 不全为零的解答，则必须是该方程组的系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} \left(\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega^2}\right) & \delta_{12}m_2 & \cdots & \delta_{1n}m_n \\ \delta_{21}m_1 & \left(\delta_{22}m_2-\frac{1}{\omega^2}\right) & \cdots & \delta_{2n}m_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1}m_1 & \delta_{n2}m_2 & \cdots & \left(\delta_{nn}m_n-\frac{1}{\omega^2}\right) \end{vmatrix}=0 \qquad (12\text{-}12)$$

或写为

$$\left|\delta M-\frac{1}{\omega^2}I\right|=0 \qquad (12\text{-}13)$$

c．将行列式展开，可解出 n 个自振频率 ω_1，ω_2，…，ω_n。

②相关概念

a．振幅方程

振幅方程是指为振幅 A_1，A_2，…，A_n 的齐次方程，如式（12-10）。

b．频率方程

频率方程是指确定 ω 数值的方程，如式（12-12）或式（12-13）。

c．结构的自振频谱

n 个自振频率 ω_1，ω_2，…，ω_n 的数值由小到大依次排列，则分别称为第一，第二，…，第 n 自振频率，并总称为结构自振的频谱。

（3）求主振型

①求解过程

a．设 n 个自振频率中的任一个频率为 ω_k，其得特解为

$$y_i^{(k)}=A_i^{(k)}\sin(\omega_k t+\varphi_k)\ (i=1,2,\ldots,n)$$

此时各质点按同一频率 ω_k 作同步简谐振动，各质点的位移相互间的比值

$$y_1^{(k)}:y_2^{(k)}:\cdots:y_n^{(k)}=A_1^{(k)}:A_2^{(k)}:\ldots:A_n^{(k)}$$

由上式可知，比值不随时间而变化，在任何时刻结构的振动都保持同一形状，整个结构就像一个单自由度结构一样在振动。

b．要确定振型便须确定各质点振幅间的比值。可将 ω_k 值代回振幅方程（12-10）而得

$$\left.\begin{aligned} \left(\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega_k^2}\right)A_1^{(k)}+\delta_{12}m_2A_2^{(k)}+\cdots+\delta_{1n}m_nA_n^{(k)}=0 \\ \delta_{21}m_1A_1^{(k)}+\left(\delta_{22}m_2-\frac{1}{\omega_k^2}\right)A_2^{(k)}+\cdots+\delta_{2n}m_nA_n^{(k)}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{n1}m_1A_1^{(k)}+\delta_{n2}m_2A_2^{(k)}+\cdots+\left(\delta_{nn}m_n-\frac{1}{\omega_k^2}\right)A_n^{(k)}=0 \end{aligned}\right\}\ (k=1,2,\cdots,n) \qquad (12\text{-}14)$$

或写为

$$\left(\delta M-\frac{1}{\omega_k^2}I\right)A^{(k)}=0 \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

式中，$A^{(k)}=\left(A_1^{(k)}\quad A_2^{(k)}\quad\cdots\quad A_n^{(k)}\right)^T$。

由于此时式（12-14）的系数行列式为零，故其 n 个方程中只有（n－1）个是独立的，因而只能确定各质点振幅间的相对比值，这便确定了振型。

②相关概念

a．主振动

主振动是指多自由度结构按任一自振频率 ω_k 进行的简谐振动。

b．主振型

主振型是指主振动的特定振动形式，简称振型。

c．主振型向量

ω_k 相应的主振型向量为

$$A^{(k)}=(A_1^{(k)}\quad A_2^{(k)}\quad \cdots\quad A_n^{(k)})^{\mathrm{T}}$$

（4）振动微分方程的一般解

一个结构有 n 个自由度，便有 n 个自振频率，相应地便有 n 个主振动和主振型，它们都是振动微分方程的特解。这些主振动的线性组合，就构成振动微分方程的一般解

$$\begin{aligned} y_i &= A_i^{(1)}\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+A_i^{(2)}\sin(\omega_2 t+\varphi_2)+\cdots+A_i^{(n)}\sin(\omega_n t+\varphi_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n}A_i^{(k)}\sin(\omega_k t+\varphi_k)\quad (i=1,2,\cdots,n) \end{aligned}$$

各主振动分量的振幅 $A_i^{(k)}$ 及初相角 φ_k 将取决于初始条件。自振频率和振型只取决于结构的质量分布和柔度系数（或刚度系数）。

（5）两自由度的结构振动微分方程的解

①求自振频率 ω

具有两个自由度的结构的振幅方程（g）为

$$\left.\begin{aligned} \left(\delta_{11}m_1-\frac{1}{\omega^2}\right)A_1+\delta_{12}m_2A_2=0 \\ \delta_{21}m_1A_1+\left(\delta_{22}m_2-\frac{1}{\omega^2}\right)A_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{g}$$

频率方程为

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_1-\dfrac{1}{\omega^2} & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & \delta_{22}m_2-\dfrac{1}{\omega^2} \end{vmatrix}=0$$

将其展开并令$\lambda=\frac{1}{\omega^2}$，解得

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1=\frac{(\delta_{11}m_1+\delta_{22}m_2)+\sqrt{(\delta_{11}m_1+\delta_{22}m_2)^2-4(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2)m_1m_2}}{2} \\ \lambda_2=\frac{(\delta_{11}m_1+\delta_{22}m_2)-\sqrt{(\delta_{11}m_1+\delta_{22}m_2)^2-4(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2)m_1m_2}}{2} \end{aligned}\right\}$$

从而可得两个自振频率为

$$\left.\begin{aligned} \omega_1=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \\ \omega_2=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \end{aligned}\right\}$$

②求主振型

a．求第一振型

将 $\omega=\omega_1$ 代入式（g），求得 $A_1^{(1)}$ 与 $A_2^{(1)}$ 的比值

$$\rho_1 = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{\frac{1}{\omega_1^2} - \delta_{11} m_1}{\delta_{12} m_2}$$

b．同理可求得第二振型为

$$\rho_2 = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{\frac{1}{\omega_2^2} - \delta_{11} m_1}{\delta_{12} m_2}$$

3．按刚度法求解

（1）求自振频率 ω

利用柔度矩阵与刚度矩阵互为逆阵的关系，将前述求频率和振型的公式加以变换即可。用 δ^{-1} 左乘式（12-11）有

$$\left(\boldsymbol{M} - \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\delta}^{-1} \right) \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$$

即

$$(K - \omega^2 M) A = 0 \qquad (12\text{-}15)$$

这便是按刚度法求解的振幅方程。

因 A 不能全为零，故可得频率方程为

$$|K - \omega_2 M| = 0$$

将其展开，可解出 n 个自振频率 ω_1，ω_2，…，ω_n。

（2）求主振型

将自振频率逐一代回振幅方程（12-15）得

$$(\boldsymbol{K} - \omega_k^2 \boldsymbol{M}) \boldsymbol{A}^{(k)} = \boldsymbol{0} \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \qquad (12\text{-}16)$$

便可确定相应的 n 个主振型。

（3）两自由度的结构

①求自振频率 ω

频率方程为

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

由此解得 ω^2 的两个根为

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2} \right) \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2} \right)^2 - \frac{4(k_{11} k_{22} - k_{12}^2)}{m_1 m_2}}$$

分别再开平方便可求得 ω_1 和 ω_2。

②求主振型

$$
\left.\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{\omega_1^2 m_1 - k_{11}}{k_{12}} \\
\rho_2 &= \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{\omega_2^2 m_1 - k_{11}}{k_{12}}
\end{aligned}\right\}
$$

4．主振型的正交性

（1）主振型之间的两个正交关系

①第一个正交关系

对于质量矩阵 M，不同频率的两个主振型是彼此正交的

$$(A^{(j)})MA^{(i)}=0$$

②第二个正交关系

对于刚度矩阵 K，不同频率的两个主振型也是彼此正交的

$$(A^{(j)})^TKA^{(i)}=0$$

主振型的正交性也是结构本身固有的特性，它不仅可以用来简化结构的动力计算，而且可用以检验所求得的主振型是否正确。

（2）主振型之间的正交性物理意义

①主振型之间的第一个正交关系的含义就是第 i 阶振型的惯性力在经历第 j 阶振型位移时所作的功等于零；

②主振型之间的第二个正交关系的含义则是与第 i 阶振型位移有关的等效静力在经历第 j 阶振型位移时所作的功等于零。

（3）正交性的推导

①每一频率及其相应的主振型均满足式（12-16），即

$$(K-\omega_k^2M)A^{(k)}=0$$

②在式（12-16）中，分别取 k＝i 和 k＝j，可得

$$KA^{(i)}=\omega_i^2MA^{(i)} \qquad (12\text{-}17)$$

$$KA^{(j)}=\omega_j^2MA^{(j)} \qquad (12\text{-}18)$$

③对式（12-17）两边左乘以 $A^{(j)}$ 的转置矩阵 $(A^{(j)})^T$，对式（12-18）两边左乘 $(A^{(i)})^T$，则有

$$(A^{(j)})^TKA^{(i)}=\omega_i^2(A^{(j)})^TMA^{(i)} \qquad (12\text{-}19)$$

$$(A^{(i)})^TKA^{(j)}=\omega_j^2(A^{(i)})^TMA^{(j)} \qquad (12\text{-}20)$$

④由于 K 和 M 均为对称矩阵，故 $K^T=K$，$M^T=M$。将式（12-20）两边转置，将有

$$(A^{(j)})^TKA^{(i)}=\omega_j^2(A^{(j)})^TMA^{(i)}$$

⑤再将式（12-19）减去式（12-21）得

$$(\omega_i^2-\omega_i^2)(A^{(j)})^TMA^{(i)}=0$$

当 i≠j 时，$\omega_i\neq\omega_j$，于是应有

$$(A^{(j)})MA^{(i)}=0$$

将这一关系代入式（12-19），立即可知

$$(A^{(j)})^TKA^{(i)}=0$$

七、多自由度结构在简谐荷载作用下的的受迫振动

1．按柔度法求解

图 12-1-14（a）所示无重量简支梁上有 n 个集中质点，并承受 k 个简谐周期荷载 $F_1\sin\theta t$，$F_2\sin\theta t$，…，$F_k\sin\theta t$ 的作用。

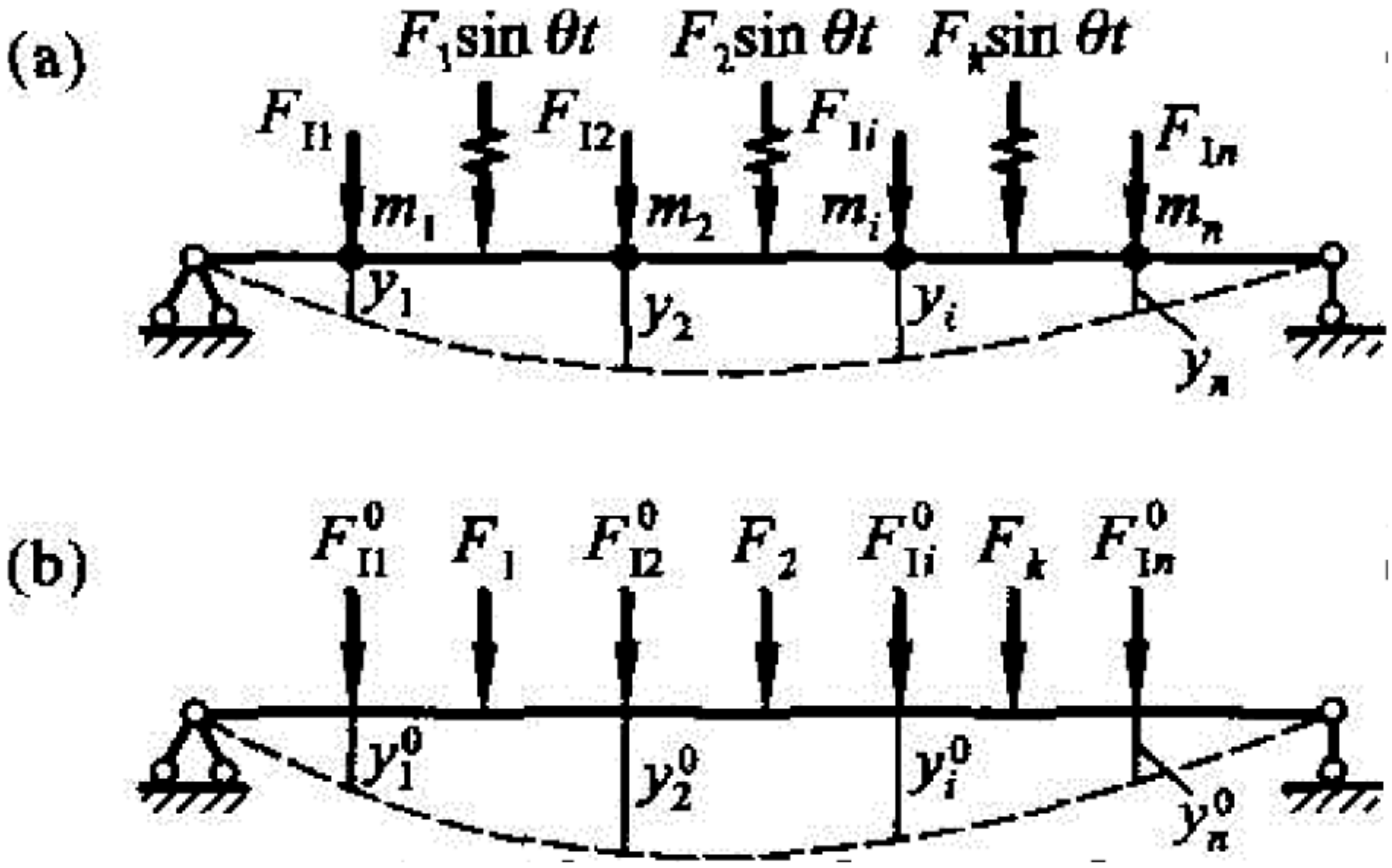


图 12-1-14

（1）按柔度法来建立振动微分方程

①任一质点 m_i 的位移 y_i 为

$$y_i=\delta_{i1}F_{I1}+\delta_{i2}F_{I2}+\dots+\delta_{in}F_{In}+y_{iP}$$

式中：$y_{iP}=\sum_{j=1}^{k}\delta_{ij}F_j\sin\theta t=\Delta_{iP}\sin\theta t$，$\Delta_{iP}=\sum_{j=1}^{k}\delta_{ij}F_j$为各动力荷载同时达到最大值时在质点 m_i 处所引起的静力位移。

②n 个质点可建立 n 个这样的位移方程，并注意到 $F_{Ii}=-m_i\ddot{y}_i$，故可写为

$$\left.\begin{aligned}
y_1+\delta_{11}m_1\ddot{y}_1+\delta_{12}m_2\ddot{y}_2+\cdots+\delta_{1n}m_n\ddot{y}_n&=\Delta_{1P}\sin\theta t\\
y_2+\delta_{21}m_1\ddot{y}_1+\delta_{22}m_2\ddot{y}_2+\cdots+\delta_{2n}m_n\ddot{y}_n&=\Delta_{2P}\sin\theta t\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_n+\delta_{n1}m_1\ddot{y}_1+\delta_{n2}m_2\ddot{y}_2+\cdots+\delta_{nn}m_n\ddot{y}_n&=\Delta_{nP}\sin\theta t
\end{aligned}\right\}\qquad(12\text{-}22)$$

写成矩阵形式

$$Y+\delta M\ddot{Y}=\Delta_P\sin\theta t$$

式中，$\Delta_P=(\Delta_{1P},\Delta_{2P}\dots\Delta_{nP})^T$，为荷载幅值引起的静力位移列向量。

（2）纯受迫振动的解

①设在平稳阶段各质点均按干扰力的频率 θ 作同步简谐振动，取纯受迫振动的解为

$$y_i=y_i^0\sin\theta t\ (i=1,2,\dots,n)\qquad(12\text{-}23)$$

式中，y_i^0 为质点 m_i 的振幅。

②将上式代入式（12-22）并注意到 $\ddot{y}_i=-y_i^0\theta^2\sin\theta t$，可得

$$\left.\begin{aligned}\left(\delta_{11}m_1-\frac{1}{\theta^2}\right)y_1^0+\delta_{12}m_2y_2^0+\cdots+\delta_{1n}m_ny_n^0+\frac{\Delta_{1P}}{\theta^2}=0\\ \delta_{21}m_1y_1^0+\left(\delta_{22}m_2-\frac{1}{\theta^2}\right)y_2^0+\cdots+\delta_{2n}m_ny_n^0+\frac{\Delta_{2P}}{\theta^2}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_{n1}m_1y_1^0+\delta_{n2}m_2y_2^0+\cdots+\left(\delta_{nn}m_n-\frac{1}{\theta^2}\right)y_n^0+\frac{\Delta_{nP}}{\theta^2}=0\end{aligned}\right\}\quad(12\text{-}24)$$

或写为

$$\left(\boldsymbol{\delta M}-\frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{Y}^0+\frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{\Delta}_P=\boldsymbol{0}$$

式中，I 为单位矩阵；Y^0 为振幅向量。

③解方程组可求出各质点在纯受迫振动中的振幅 y_1^0，y_2^0，…，y_n^0，并将振幅再代入式（12-23）即得各质点的振动方程。

（3）求惯性力幅值

①各质点的惯性力为

$$F_{Ii}=-m_i\ddot{y}_i=m_i\theta^2y_i^0\sin\theta t=F_{Ii}^0\sin\theta t$$

式中，$F_{Ii}^0=m_i\theta^2y_i^0$ 为惯性力的最大值。

②位移、惯性力及干扰力将同时达到最大值。在计算最大动力位移和内力时，可将惯性力和干扰力的最大值当作静力荷载加于结构上（图 12-1-14（b））进行计算。

利用 $F_{Ii}^0=m_i\theta^2y_i^0$ 的关系，将式（12-24）改写成

$$\left.\begin{aligned}\left(\delta_{11}-\frac{1}{m_1\theta^2}\right)F_{I1}^0+\delta_{12}F_{I2}^0+\cdots+\delta_{1n}F_{In}^0+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{21}F_{I1}^0+\left(\delta_{22}-\frac{1}{m_2\theta^2}\right)F_{I2}^0+\cdots+\delta_{2n}F_{In}^0+\Delta_{2P}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_{n1}F_{I1}^0+\delta_{n2}F_{I2}^0+\cdots+\left(\delta_{nn}-\frac{1}{m_n\theta^2}\right)F_{In}^0+\Delta_{nP}=0\end{aligned}\right\}$$

或写为

$$\left(\boldsymbol{\delta}-\frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{M}^{-1}\right)\boldsymbol{F}_I^0+\boldsymbol{\Delta}_P=\boldsymbol{0}$$

式中，F_I^0 为最大惯性力向量。

这样便可直接解得各惯性力幅值。

（4）共振现象

当 $\theta=\omega_k$（k＝1，2，…，n），即干扰力的频率与任一个自振频率相等时，系统发生共振，此时的振幅、惯性力及内力值均为无限大。实际上由于存在阻尼，振幅等量值不会为无限大，但这对结构仍是很危险的，应避免。

2．按刚度法求解

（1）振动微分方程

图 12-1-15 所示 n 个自由度的结构，当各干扰力均作用在质点处时，其动力平衡方程如下

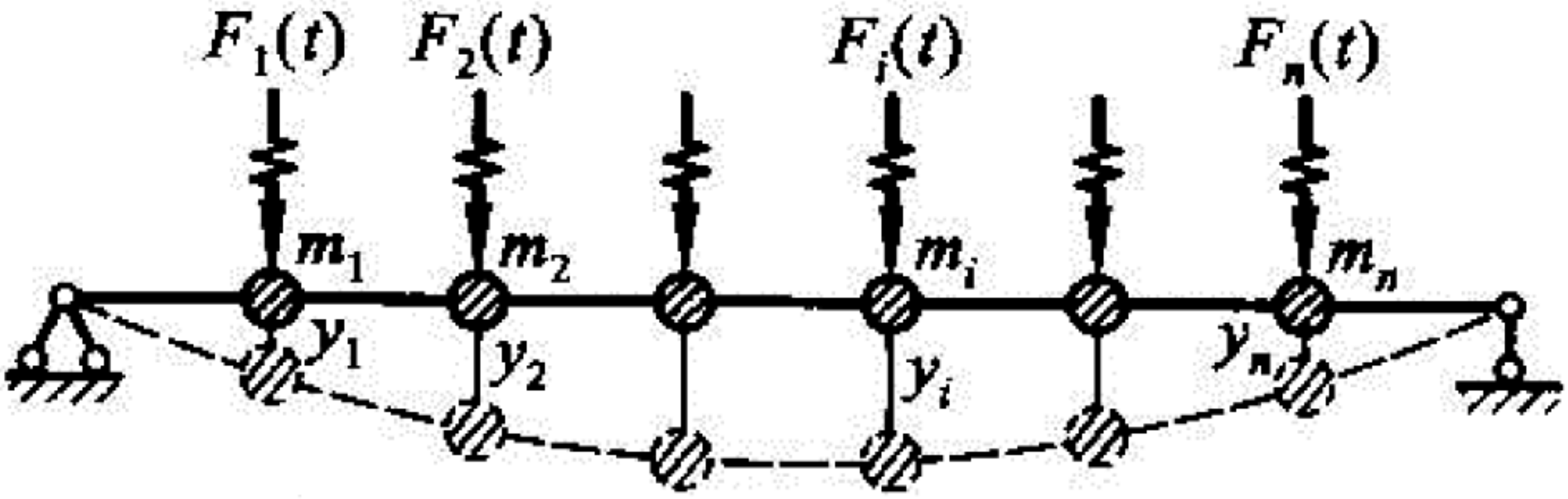


图 12-1-15

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 + k_{11}y_1 + k_{12}y_2 + \cdots + k_{1n}y_n &= F_1(t) \\ m_2\ddot{y}_2 + k_{21}y_1 + k_{22}y_2 + \cdots + k_{2n}y_n &= F_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n\ddot{y}_n + k_{n1}y_1 + k_{n2}y_2 + \cdots + k_{nn}y_n &= F_n(t) \end{aligned}\right\}$$

写成矩阵形式则为

$$M\ddot{Y} + KY = F(t) \tag{12-25}$$

设各干扰力均为同步简谐荷载。即

$$F(t) = F\sin\theta t$$

式中，$F=(F_1\ F_2\ \ldots\ F_n)^T$ 为荷载幅值向量。

（2）微分方程求解

在平稳阶段各质点亦均按频率 θ 作同步简谐振动

$$Y = Y^0\sin\theta \tag{12-26}$$

代入式（12-25）并消去 sinθt 得

$$(K-\theta^2M)Y^0 = F \tag{12-27}$$

由上式便可解算各质点的振幅值。代入式（12-26）即得各质点的位移方程。

（3）求惯性力幅值

a．各质点的惯性力为

$$F_I = -M\ddot{Y} = \theta^2 MY^0\sin\theta t = F_I^0\sin\theta t$$

式中，F_I 为惯性力向量；$F_I^0=\theta^2MY^0$ 为惯性力幅值向量。

b．利用 $F_I^0=\theta^2MY^0$ 可将式（12-27）改写为

$$(KM^{-1}-\theta^2 I)F_I^0 = \theta^2 F$$

式中，I 为单位矩阵。

由上式即可直接求解惯性力幅值。

八、振型分解法

1．振型分解法的优点

多自由度结构的无阻尼受迫振动微分方程，按刚度法有

$$M\ddot{Y} + KY = F(t)$$

质量矩阵 M 是对角矩阵，但刚度矩阵 K 一般不是对角矩阵，因此方程组是耦联的。当荷载 F（t）不是按简谐

规律变化而是任意动力荷载时，求解联立微分方程组是很困难的。振型分解法解除了方程组的耦联，亦即使其变为一个独立方程，可使计算大为简化。

2．振型分解法的步骤

（1）求自振频率 ω_i 和振型 $\Phi^{(i)}$（i＝1，2，…，n）

（2）计算广义质量和广义荷载

$$\left.\begin{aligned}\overline{M}_i &= \{\boldsymbol{\Phi}^{(i)}\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi}^{(i)}\\ \overline{F}_i(t) &= \{\boldsymbol{\Phi}^{(i)}\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t)\end{aligned}\right\}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

（3）求解正则坐标的振动微分方程为

$$\ddot{\alpha}_i+\omega_i^2\alpha_i=\frac{\overline{F}_i(t)}{\overline{M}_i}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

与单自由度问题一样求解，得到 α_1，α_2，…，α_n。

（4）计算几何坐标

由 $Y=\Phi\alpha$ 求出各质点位移 y_1，y_2，…，y_n，然后即可计算其他动力（加速度、惯性力和动内力等）。

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}\Phi_1^{(1)}\\\Phi_2^{(1)}\\\vdots\\\Phi_n^{(1)}\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}\Phi_1^{(2)}\\\Phi_2^{(2)}\\\vdots\\\Phi_n^{(2)}\end{pmatrix}+\cdots+\alpha_n\begin{pmatrix}\Phi_1^{(n)}\\\Phi_2^{(n)}\\\vdots\\\Phi_n^{(n)}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\Phi_1^{(1)}&\Phi_1^{(2)}&\cdots&\Phi_1^{(n)}\\\Phi_2^{(1)}&\Phi_2^{(2)}&\cdots&\Phi_2^{(n)}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\Phi_n^{(1)}&\Phi_n^{(2)}&\cdots&\Phi_n^{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$$

九、多自由度结构在任意荷载作用下的受迫振动

1．振动微分方程的建立

图 12-1-16 所示结构具有 n 个自由度，各质点受任意荷载 F_i（t）和黏滞阻尼力 F_{Di} 作用，现建立其振动微分方程。

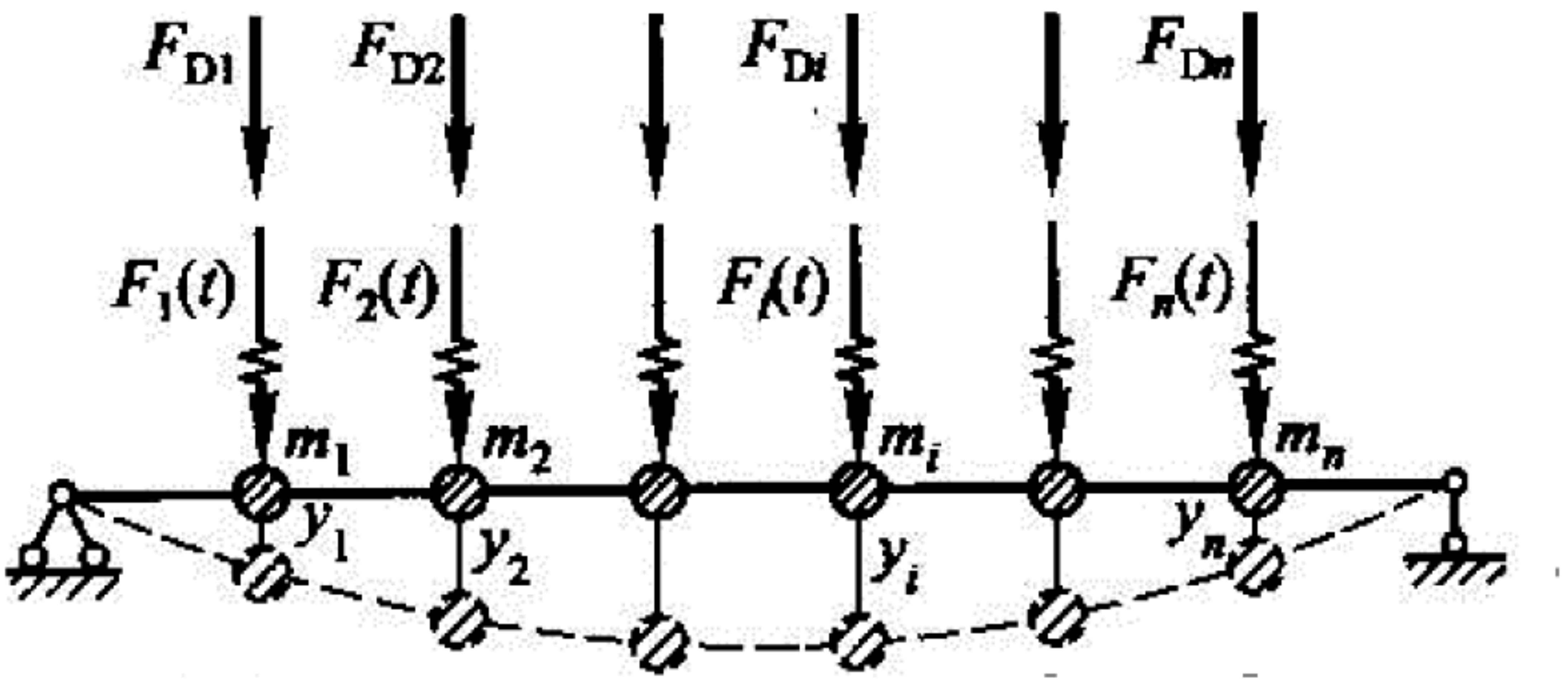


图 12-1-16

其动力平衡方程如下

$$\left.\begin{aligned}m_1\ddot{y}_1+c_{11}\dot{y}_1+c_{12}\dot{y}_2+\cdots+c_{1n}\dot{y}_n+k_{11}y_1+k_{12}y_2+\cdots+k_{1n}y_n=F_1(t)\\m_2\ddot{y}_2+c_{21}\dot{y}_1+c_{22}\dot{y}_2+\cdots+c_{2n}\dot{y}_n+k_{21}y_1+k_{22}y_2+\cdots+k_{2n}y_n=F_2(t)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\m_n\ddot{y}_n+c_{n1}\dot{y}_1+c_{n2}\dot{y}_2+\cdots+c_{nn}\dot{y}_n+k_{n1}y_1+k_{n2}y_2+\cdots+k_{nn}y_n=F_n(t)\end{aligned}\right\}$$

将此式写成矩阵形式则为

$$\begin{pmatrix}m_1&&&0\\&m_2&&\\&&\ddots&\\0&&&m_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{y}_1\\\ddot{y}_2\\\vdots\\\ddot{y}_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\\dot{y}_2\\\vdots\\\dot{y}_n\end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1n}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{n1}&k_{n2}&\cdots&k_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_1(t)\\F_2(t)\\\vdots\\F_n(t)\end{pmatrix}$$

或简写为

$$M\ddot{Y}+c\dot{Y}+KY=F(t)$$

式中，c_{ij} 为质点 j 处的运动速度引起质点 i 处的阻力系数；F_i（t）为作用在质点 i 处的任意荷载；Y 为速度列向量；F（t）为任意荷载列向量，它们均是 n×1 阶列矩阵；c 为阻尼矩阵，是 n×n 阶方阵。

2．振动微分方程组的解耦

振动微分方程组引入正则坐标和主振型矩阵，并全式左乘主振型矩阵的转置矩阵，得

$$\Phi^{T}M\Phi\ddot{\alpha}+\Phi^{T}c\Phi\dot{\alpha}+\Phi^{T}K\Phi\alpha=\Phi^{T}F(t)\qquad(12\text{-}28)$$

引用瑞利（Rayleigh）阻尼假设

$$c=aM+bK$$

式中，a，b 为两个待定常数。

将式上式各项左乘 Φ^T 并右乘 Φ，得到

$$\Phi^{T}c\Phi=a\Phi^{T}M\Phi+b\Phi^{T}K\Phi$$

由于 $\Phi^TM\Phi$ 和 $\Phi^TK\Phi$ 均为对角矩阵，则 $\Phi^Tc\Phi$ 也是对角矩阵，这就完成了振动微分方程组的完全解耦。

3．待定常数 a，b 的确定

在完成了振动微分方程组的解耦之后，式（12-28）可分解为 n 个独立方程

$$\overline{M}_i\ddot{\alpha}_i+\overline{c}_i\dot{\alpha}_i+\overline{K}_i\alpha_i=\overline{F}_i(t)\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

其中

$$\overline{c}_i=2\xi_i\omega_i\overline{M}_I$$

称为广义阻力系数。

则

$$\overline{c}_i=a\overline{M}_i+b\overline{K}_i=2\xi_i\omega_i\overline{M}_i$$

或

$$\xi_i=\frac{1}{2\omega_i}a+\frac{1}{2\omega_i}\frac{\overline{K}_i}{\overline{M}_i}b$$

由于$\overline{K}_i=\omega_i^2\overline{M}_i$，可得

$$\xi_i=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\omega_i}+b\omega_i\right) \tag{12-29}$$

通常把第一和第二振型的阻尼比 ξ_1 和 ξ_2，以及相应的频率 ω_1 和 ω_2 分别代入式（12-29），即可联立求解得到

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{2\omega_1\omega_2(\xi_1\omega_2-\xi_2\omega_1)}{\omega_2^2-\omega_1^2}\\ b&=\frac{2(\xi_2\omega_2-\xi_1\omega_1)}{\omega_2^2-\omega_1^2}\end{aligned}\right\}$$

在求得 a，b 之后，即可利用式（12-29）计算其余振型的阻尼比。

4．求解步骤

（1）求自振频率 ω_i 和振型 Φ（i）（i＝1，2， … ，n）

（2）计算广义质量和广义荷载

$$\left.\begin{aligned}\overline{M}_i&=(\Phi^{(i)})^T M\Phi^{(i)}\\ \overline{F}_i(t)&=(\Phi^{(i)})^T F(t)\end{aligned}\right\}\qquad (i=1,2,\cdots,n)。$$

（3）根据自振频率中的 ω_1 和 ω_2 以及已知的两个振型的阻尼比 ξ_1 和 ξ_2，求出常数 a，b 之后，再计算其余振型的阻尼比 ξ_i（i＝3，4，…，n）。

（4）求解正则坐标表示的振动微分方程

$$\ddot{\alpha}_i+2\xi_i\omega_i\dot{\alpha}_i+\omega_i^2\alpha_i=\frac{\overline{F}_i(t)}{\overline{M}_i}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

与单自由度问题一样求解，得到 α_1，α_2，…，α_n。

（5）计算几何坐标

$$Y=\Phi\alpha$$

求出各质点位移 y_1，y_2，…，y_n，然后即可计算其他动力（加速度、惯性力和动内力等）。

十、地震作用计算

1．地震作用的基本概念

（1）定义

地震作用是指由地震动引起的结构动态作用。

（2）分类

①水平地震作用；

②竖向地震作用。

（3）地震作用的实质

地震引起的地面运动在结构中产生的惯性力，也称地震荷载。

2．单自由度结构的地震作用计算

图 12-1-17（a）表示单自由度结构在地震时的位移和变形示意，其中 y_g（t）是地震引起的地面位移；y（t）则是质点相对于地面的位移反应。

（1）振动微分方程

现取质量为 m 的质点为隔离体，如图 12-1-17（b）所示，其动力平衡方程为

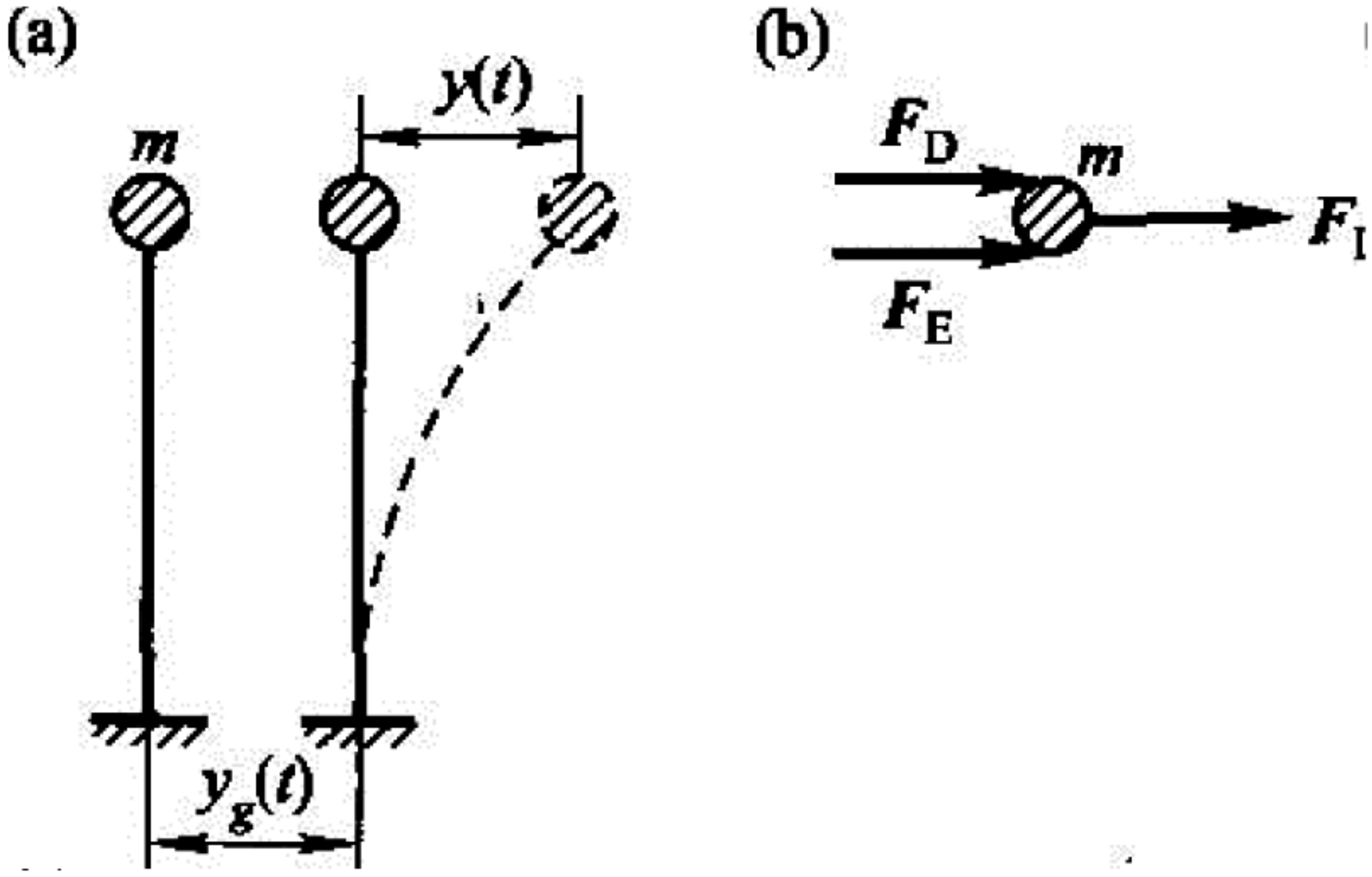


图 12-1-17

$$F_I + F_D + F_E = 0$$

其中惯性力

$$F_I = -m[\ddot{y}_g(t) + \ddot{y}(t)]$$

将平衡方程展开可得

$$m[\ddot{y}_g(t) + \ddot{y}(t)] + c\dot{y}(t) + k_{11}y(t) = 0$$

或

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + k_{11}y(t) = -m\ddot{y}_g(t)$$

（2）位移方程

在初始位移和初始速度均为零时，可应用杜哈梅积分求得其地震作用的位移反应为

$$y(t) = \frac{1}{m\omega'}\int_0^t F(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega'(t-\tau)d\tau$$

即

$$y(t) = -\frac{1}{\omega'}\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin\omega'(t-\tau)d\tau$$

式中，$\omega' = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ 为有阻尼自振频率。

（3）地震作用的最大值

①经相关推导结构上受到的地震作用为

$$F(t) = -m[\ddot{y}(t) + \ddot{y}_g(t)]$$

$$= -\frac{m\omega^2}{\omega'}\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)e^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin[\omega'(t-\tau) + 2\varphi]d\tau$$

②地震作用的最大值为

$$F_{\max}=m\left[\ddot{y}(t)+\ddot{y}_g(t)\right]_{\max}=m\left|\frac{\omega^2}{\omega'}\int_0^t\ddot{y}_g(\tau)\mathrm{e}^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin[\omega'(t-\tau)+2\varphi]\mathrm{d}\tau\right|_{\max}$$

令

$$a_{\max}=\left[\ddot{y}(t)+\ddot{y}_g(t)\right]_{\max}=\left|\frac{\omega^2}{\omega'}\int_0^t\ddot{y}_g(\tau)\mathrm{e}^{-\xi\omega(t-\tau)}\sin[\omega'(t-\tau)+2\varphi]\mathrm{d}\tau\right|_{\max}$$

则

$$F_{\max}=ma_{\max}=\frac{W}{g}a_{\max}=\alpha W$$

式中，$a_{\max}$ 为质点运动绝对加速度最大值；W 为质点重量；而$\alpha=\frac{a_{\max}}{g}$为地震影响系数。

（4）地震影响系数

地震影响系数表示单自由度结构在地震时以重力加速度 g 为单位的最大反应加速度，是现行建筑抗震设计规范中的重要设计参数。其表达式为

$$\alpha=\frac{a_{\max}}{g}$$

3．多自由度结构的地震作用计算

（1）振动微分方程

多自由度结构受地震地面运动 y_g（t）引起的地震荷载$F(t)=-m\ddot{y}_g(t)$时的振动微分方程（刚度法）为

$$M\ddot{Y}+c\dot{Y}+KY=-MI\ddot{y}_g(t)$$

（2）位移方程

用振型分解法求解，将上式写成以正则坐标 α 和振型矩阵 Φ 表达的形式

$$M\Phi\ddot{\alpha}+c\Phi\dot{\alpha}+K\Phi\alpha=-MI\ddot{y}_g(t)$$

用 Φ^T 左乘上式各项，由振型矩阵的正交性可得

$$\overline{M}_i\ddot{\alpha}_i+\overline{c}_i\dot{\alpha}_i+\overline{K}_i\alpha=-(\Phi^{(i)})^{\mathrm{T}}MI\ddot{y}_g(t)$$

式中，$\Phi^{(i)}$ 为第 i 振型的振型向量。

令

$$\gamma_i=\frac{(\Phi^{(i)})^{\mathrm{T}}MI}{\overline{M}_i}=\frac{(\Phi^{(i)})^{\mathrm{T}}MI}{(\Phi^{(i)})^{\mathrm{T}}M\Phi^{(i)}}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

式中，γ_i 为 i 振型参与系数，对每一振型均为常数；$\Phi_j^{(i)}$ 则表示第 i 振型中第 j 自由度的量值。

则

$$\ddot{\alpha}_i+2\xi_i\omega_i\dot{\alpha}_i+\omega_i^2\alpha_i=-\gamma_i\ddot{y}_g(t)\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

此即对应于第 i 振型的单自由度振动微分方程。

根据杜哈梅积分，可得其零初始条件下的正则坐标解答为

$$\alpha_i(t)=-\frac{\gamma_i}{\omega_i'}\int_0^t\ddot{y}_g(\tau)\mathrm{e}^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)}\sin\omega_i'(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\gamma_i\delta_i(t)$$

式中，$\delta_i(t) = -\frac{1}{\omega_i'}\int_0^t \ddot{y}_g(\tau)e^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)}\sin\omega_i'(t-\tau)d\tau$ 为第 i 振型广义位移。

位移反应 $y_i(t)$ 为

$$y_i(t) = \sum_j \Phi_i^{(j)}\alpha_j(t) = \sum_i \gamma_j\Phi_i^{(j)}\delta_j(t)$$

矩阵表示为

$$y(t) = \Phi(\gamma\delta)$$

（3）地震作用的最大值

①质点 i 的地震作用

$$F_i(t) = m_i\left[\ddot{y}_g(t) + \ddot{y}_i(t)\right] = m_i\left[\ddot{y}_g(t) + \sum_j \gamma_j\Phi_i^{(j)}\ddot{\delta}_j(t)\right]$$

化简为

$$= m_i\sum_j \gamma_j\Phi_i^{(j)}\left[\ddot{y}_g(t) + \ddot{\delta}_j(t)\right]$$

$$= m_i\sum_j \gamma_j\Phi_i^{(j)}a_j(t)$$

式中，$a_j(t) = \left[\ddot{y}_g(t) + \ddot{\delta}_j(t)\right]$ 为第 j 振型广义加速度反应函数。

②又因为

$$F_i(t) = m_i\sum_j \gamma_j\Phi_i^{(j)}a_j(t)$$

$$= W_i\sum_j \gamma_j\Phi_i^{(j)}\frac{a_j(t)}{g}$$

$$= W_i\sum_j \gamma_j\Phi_i^{(j)}\alpha_j(t)$$

$$= \sum_j F_{ij}(t)$$

第 j 振型对应第 i 自由度的地震作用函数

$$F_{ij}(t) = W_i\gamma_j\Phi_i^{(j)}\alpha_j(t)$$

第 j 振型的地震最大作用则为

$$(F_{ij})_{max} = W_i\gamma_j\Phi_i^{(j)}\alpha_j(T)$$

式中，$\alpha_j(T)$ 为第 j 振型地震影响系数的最大值；W_i 为 i 质点重量。

（4）影响系数

$$\alpha_j(t) = \frac{a_j(t)}{g}$$

十一、无限自由度结构的振动

图 12-1-18（a）所示具有均布质量的单跨梁，其自由度将为无限大。

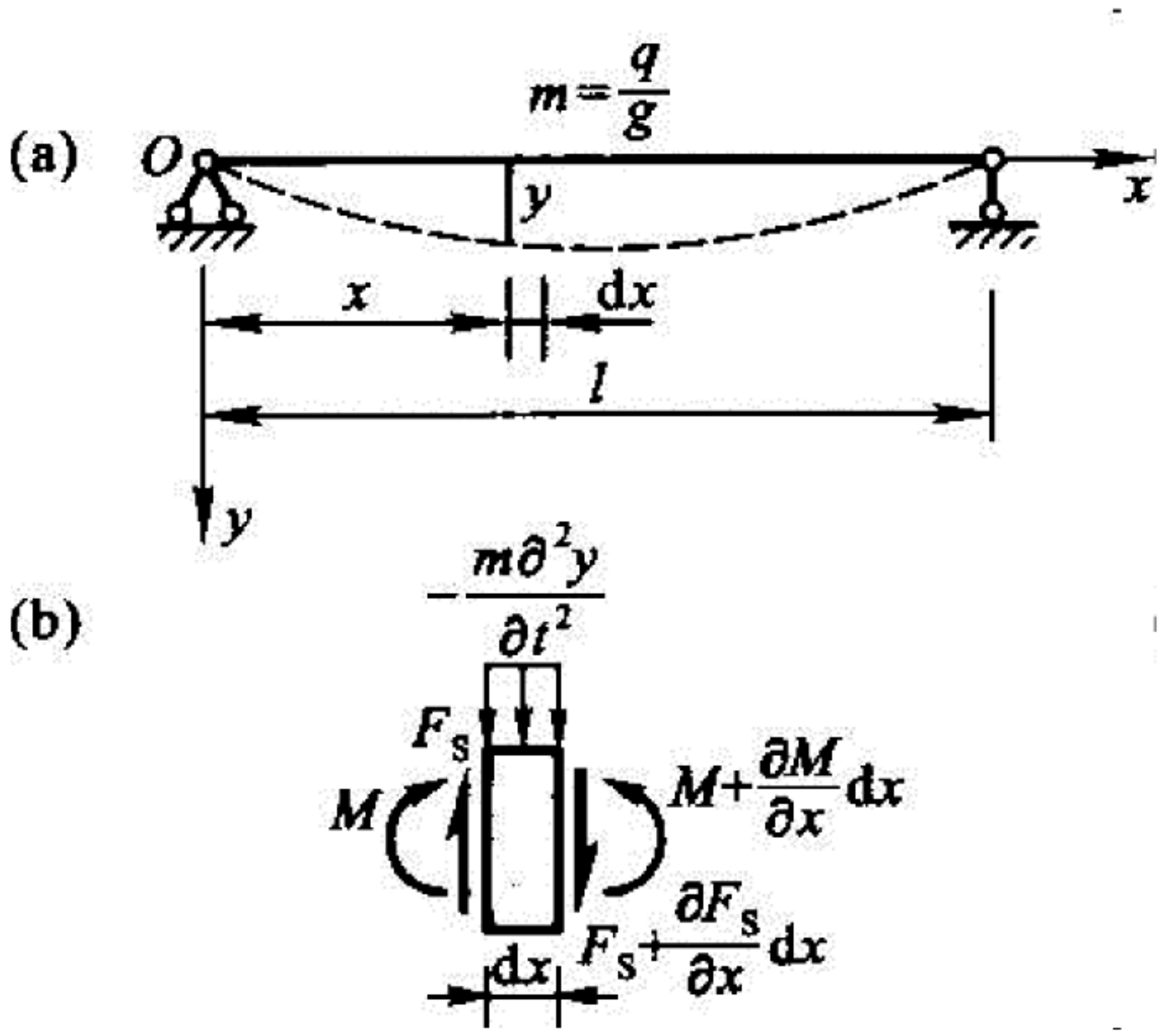


图 12-1-18

1．梁的自由振动

（1）微分方程

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$$

（2）通解

$$y(x,t)=F(x)\cdot T(t)=aF(x)\sin(\omega t+\varphi)=y_x\sin(\omega t+\varphi)$$

振幅曲线为

$$y_x=A\cosh kx+B\sinh kx+C\cos kx+D\sin kx \qquad (12\text{-}30)$$

式中，A、B、C、D 为待定的任意常数；$k^4=\frac{\omega^2 m}{EI}$ 或 $\omega=k^2\sqrt{\frac{EI}{m}}$。

（3）引入边界条件后的解

①引入初始条件

为便于计算，今引入新的常量

$$A=\frac{1}{2}(C_1+C_3),\quad B=\frac{1}{2}(C_2+C_4)$$

$$C=\frac{1}{2}(C_1-C_3),\quad D=\frac{1}{2}(C_2-C_4)$$

代入式（12-30），有

$$y_x=C_1A_{kx}+C_2B_{kx}+C_3C_{kx}+C_4D_{kx}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}A_{kx}&=\frac{1}{2}(\cosh kx+\cos kx)\\B_{kx}&=\frac{1}{2}(\sinh kx+\sin kx)\\C_{kx}&=\frac{1}{2}(\cosh kx-\cos kx)\\D_{kx}&=\frac{1}{2}(\sinh kx-\sin kx)\end{aligned}\right\}$$

称为克雷洛夫函数。

梁的挠度 y_x、角位移 y_x'、弯矩 M_x 和剪力 F_{Sx} 的公式如下

$$\left.\begin{aligned}y_x&=C_1A_{kx}+C_2B_{kx}+C_3C_{kx}+C_4D_{kx}\\y_x'&=k(C_1D_{kx}+C_2A_{kx}+C_3B_{kx}+C_4C_{kx})\\y_x''&=\frac{M_x}{EI}=k^2(C_1C_{kx}+C_2D_{kx}+C_3A_{kx}+C_4B_{kx})\\y_x'''&=\frac{F_{Sx}}{EI}=k^3(C_1B_{kx}+C_2C_{kx}+C_3D_{kx}+C_4A_{kx})\end{aligned}\right\}$$

引入初始条件，当 x＝0 时

$$y_x=y_0,\quad y_x'=y_0',\quad y_x''=\frac{M_0}{EI},\quad y_x'''=\frac{F_{S0}}{EI}$$

求得常数为

$$C_1=y_0,\quad C_2=\frac{1}{k}y_0',\quad C_3=\frac{1}{k^2}\frac{M_0}{EI},\quad C_4=\frac{1}{k^3}\frac{F_{S0}}{EI}$$

把这些常量代入得

$$\left.\begin{aligned}EIy_x&=EIy_0A_{kx}+EIy_0'\frac{1}{k}B_{kx}+M_0\frac{1}{k^2}C_{kx}+F_{S0}\frac{1}{k^3}D_{kx}\\EIy_x'&=EIy_0kD_{kx}+EIy_0'A_{kx}+M_0\frac{1}{k}B_{kx}+F_{S0}\frac{1}{k^2}C_{kx}\\M_x&=EIy_0k^2C_{kx}+EIy_0'kD_{kx}+M_0A_{kx}+F_{S0}\frac{1}{k}B_{kx}\\F_{Sx}&=EIy_0k^3B_{kx}+EIy_0'k^2C_{kx}+M_0kD_{kx}+F_{S0}A_{kx}\end{aligned}\right\}$$

②求频率 ω

根据梁的边界条件，通常可确定有两个初参数等于零和写出包含另两个初参数的两个齐次方程。为了求得非零解，应使该两方程的系数行列式等于零，从而求得 k 值和频率 ω。

③求 y_x 的表达式和主振型曲线

a．将 k 值代回上述两齐次方程的任何一式，再代入 y_x 的表达式即得到相应的主振型曲线。

b．无限自由度结构结构有无穷多个自振频率和振型。但在实用中一般只需求出其最低的几个频率。

（4）全解

对于每一个频率 ω_i 和振型 $y_x^{(i)}$，方程都有一个特解，其全解则为各特解的线性组合，即

$$y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}a_iy_x^{(i)}\sin(\omega_it+\varphi_i)$$

2．简谐均布干扰力作用下的受迫振动

（1）微分方程

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p\sin\theta t$$

（2）特解形式

$$y=F(x)\sin\theta t$$

（3）基本方程

$$\left.\begin{aligned}
EIy_x &= EIy_0A_{kx}+EIy_0'\frac{1}{k}B_{kx}+M_0\frac{1}{k^2}C_{kx}+F_{S0}\frac{1}{k^3}D_{kx}+p\frac{A_{kx}-1}{k^4}\\
EIy_x' &= EIy_0kD_{kx}+EIy_0'A_{kx}+M_0\frac{1}{k}B_{kx}+F_{S0}\frac{1}{k}C_{kx}+p\frac{D_{kx}}{k^3}\\
M_x &= EIy_0k^2C_{kx}+EIy_0'kD_{kx}+M_0A_{kx}+F_{S0}\frac{1}{k}B_{kx}+p\frac{C_{kx}}{k^2}\\
F_{Sx} &= EIy_0k^3B_{kx}+EIy_0'k^2C_{kx}+M_0kC_{kx}+F_{S0}A_{kx}+p\frac{B_{kx}}{k}
\end{aligned}\right\}$$

式中，$k^4=\frac{\theta^2 m}{EI}$。

因干扰力的频率 θ 是已知的，所以 k 值也是已知的。

十二、计算频率的近似法

1．能量法

（1）振动结构的两种能量

①由于具有质量和速度而构成的动能；

②由于结构变形而存储的应变能。

（2）能量守恒原理

根据能量守恒原理，结构在无阻尼自由振动中的任何时刻，其动能 T 和应变能 V_ε 之和应等于常量，即

$$T(t)+V_\varepsilon(t)=常量$$

可以简单证明得到

$$V_{\varepsilon max}=T_{max}$$

（3）能量法求 ω

以梁为例，假定其振动方程为

$$y(x,t)=y(x)\sin(\omega t+\varphi)$$

①最大动能

其动能为

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l m(x)v^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)\int_0^l m(x)y^2(x)\mathrm{d}x$$

当 cos（ωt＋φ）＝1 时有

$$T_{max}=\frac{1}{2}\omega^2\int_0^l m(x)y^2(x)\mathrm{d}x$$

②最大应变能

结构的应变能为

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2 dx}{EI} = \frac{1}{2}\int_0^l EI[y''(x,t)]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2(\omega t+\varphi)\int_0^l EI[y''(x)]^2 dx$$

当 sin（ωt＋φ）＝1 时有

$$V_{\varepsilon max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI[y''(x)]^2 dx$$

③求 ω

由 $T_{max}=V_{\varepsilon max}$ 得

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI[y''(x)]^2 dx}{\int_0^l m(x)y^2(x)dx}$$

如果结构上除分布质量 m（x）外，还有集中质量 m_i（i＝1，2，…，n），则上式应改为

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI[y''(x)]^2 dx}{\int_0^l m(x)y^2(x)dx + \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2}$$

振幅曲线 y（x）与第一振型吻合，则可求得第一频率的精确值；若恰好与第二振型吻合，则可求得第二频率的精确值。

但曲线 y（x）往往是近似的，故求得的频率为近似值。这种方法适宜于计算第一频率。一般用结构的自重作用下的弹性曲线来作为 y（x），于是

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l m(x)gy(x)dx + \sum_{i=1}^{n} m_i g y_i}{\int_0^l m(x)y^2(x)dx + \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2}$$

如果是求水平方向振动的频率，则重力应沿水平方向作用。

2．集中质量法

（1）方法

把结构的分布质量在一些适当的位置集中起来而化为若干集中质量，把无限自由度结构简化为有限自由度结构。

（2）集中质量位置的选择

①在选择集中质量的位置时，须注意结构的振动形式，而将质量集中在振幅较大的地方，才能使所得的频率值较为正确。

②在计算双铰拱的最低频率时，则由于其相应的振动形式是反对称的，拱顶竖向位移为零，故不宜将质量集中在该处，而应集中在拱跨的两个 1／4 点处，因为这些地方的振幅较大（图 12-1-19（a））。

③如图 12-1-19（b）所示刚架，当它作对称振动时，各结点无线位移，这时应将质量集中于杆件的中点；而在反对称振动时，如图 12-1-19（c）所示，应将质量集中在结点上。

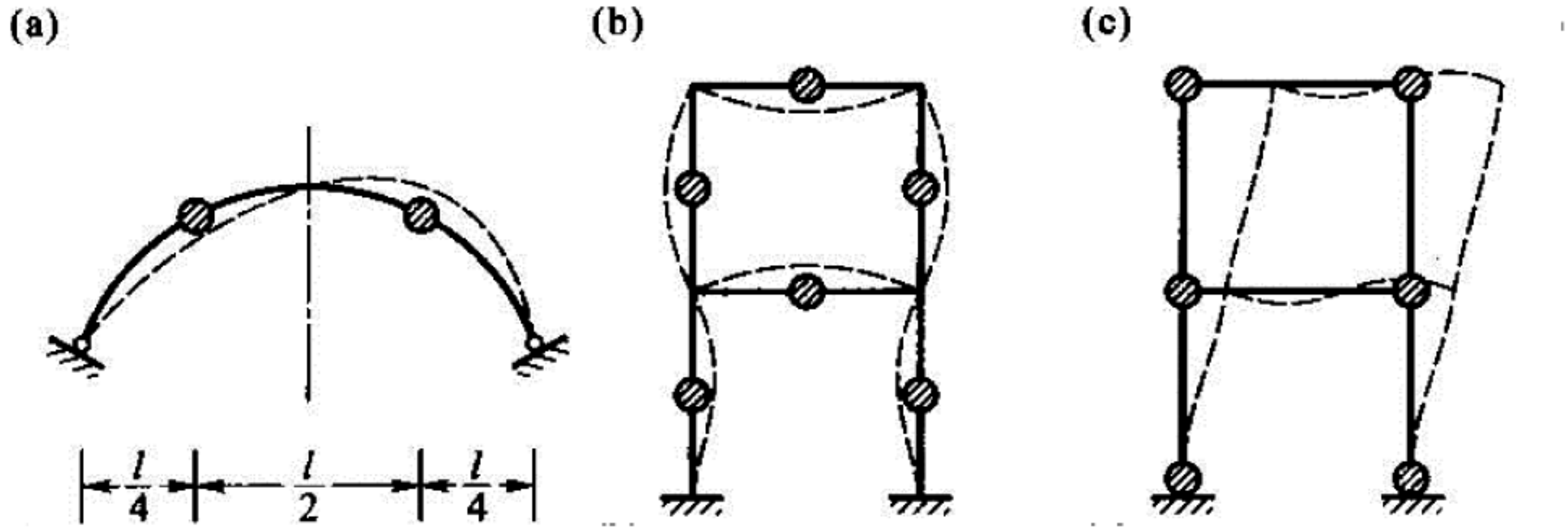


图 12-1-19

3．用相当梁法计算桁架的最低频率

（1）方法

用一个在某一特征点处位移与桁架位移相等的梁，称为相当梁，来代替原有桁架，用相当梁的自振频率近似代替原桁架的频率。特征点可选在跨度中点或有较大集中荷载作用的结点。

（2）求 ω

①当桁架变形时，任一结点 k 的竖向位移 Δ_{kP}

$$\Delta_{kP}=\sum\frac{\bar{F}_{Nk}F_{NP}l}{EA}$$

相当梁上同一点 k 的竖向位移 v_{kP} 将是其惯性矩 I 的函数，故可写成

$$v_{kP}=f\left(\frac{1}{I}\right)$$

使二者相等即可算出相当梁的惯性矩 I。

②对于简支桁架，设其自重为 q，则在具有相同重量的相当梁中点的竖向位移为

$$v_{kP}=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}$$

令 $v_{kP}=\Delta_{kP}$ 则求出相当梁惯性矩

$$EI=\frac{5}{384}\frac{ql^4}{\Delta_{kP}}$$

可按简支梁的频率公式求其最低频率

$$\omega=\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\omega=\frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{5ql^4g}{384q\Delta_{kP}}}=1.13\sqrt{\frac{g}{\Delta_{kP}}}$$

12.2 课后习题详解

复习思考题

1．怎样区别动力荷载与静力荷载？动力计算与静力计算的主要差别是什么？

答：（1）静力荷载：指施力过程缓慢，不致使结构产生显著的加速度，因而可以略去惯性力影响的荷载；动力荷载：指将使结构产生不容忽视的加速度，因而必须考虑惯性力的影响的荷载。

主要差别在于是否考虑惯性力的影响。

（2）计算上的差别：
①计算式中是否加入惯性力的数值；
②静力计算时，结构处于平衡状态，荷载的大小、方向、作用点及由它引起的结构的内力、位移等各种量值都不随时间而变化；而动力计算时，结构将发生振动，各种量值均随时间而变化；
③动力分析方法常与荷载类型有关，而静力分析方法与荷载类型无关。

2．何谓结构的振动自由度？它与机动分析中的自由度有何异同？如何确定结构的振动自由度？
答：（1）结构振动的自由度是指结构在弹性变形过程中确定全部质点位置所需的独立参数的数目。
（2）机动分析中的自由度简称静力自由度（又称动力自由度）。
①两者相同点：在数学意义上是一致的，都是强调体系空间质量所需的几何参量的个数。
②不同点：静力自由度是机构移动即刚体位移，排除了各个组成部件的变形运动；而动力自由度是变形位移导致机构位置改变，即体系变形过程质量的运动自由度。
（3）确定结构振动自由度的两种方法：
①直接由确定质点位置所需的独立参数数目来判定；
②加入最少数量的链杆以限制刚架上所有质点的位置，则该刚架的振动自由度数目即等于所加入链杆的数目。

3．建立振动微分方程有哪两种基本方法？每种方法所建立的方程代表什么条件？
答：（1）建立振动微分方程的两种基本方法：刚度法和柔度法。
（2）刚度法代表力的平衡条件，柔度法代表变形协调条件。

4．为什么说结构的自振频率和周期是结构的固有性质？怎样改变它们？
答：（1）自振频率和周期是结构的固有性质的原因：
结构的自振频率和周期只取决于结构自身的质量和刚度，反映着结构固有的动力特性，而外部干扰力只能影响振幅和初相角的大小并不能改变结构的自振频率。
（2）若要改变结构的自振频率和周期，可以增加或减小结构的重量；此外通过调整结构形式或增大构件截面等来改变整体结构的刚度，也可以使结构的自振频率和周期变化。

5．阻尼对结构的自振频率和振幅有什么影响？何谓临界阻尼情况？
答：（1）按粘滞阻尼（或等效粘滞阻尼）假定分析出的体系自振频率计阻尼与不计阻尼是不一样的，两者的关系为$\omega_d=\omega\sqrt{1-\xi^2}$，计阻尼自振频率阻尼$\omega_d$小于不计阻尼频率$\omega$；又$T=\frac{2\pi}{\omega}$，故计阻尼时的自振周期会长于不计阻尼的周期。当$\xi \prec 0.2$，则存在$0.96 \prec \omega_r \prec 1$，由于相差不大，通常不考虑阻尼对自振频率和周期的影响。
（2）当阻尼系数等于自振频率，即$\delta=\omega$时，为临界阻尼情况。此时特征根是一对重根，阻尼比$\xi=1$，相应的c称为临界阻力系数。

6．何谓动力因数？简谐荷载下动力因数与哪些因素有关？在何种情况下位移动力因数与内力动力因数是相同的？
答：（1）动力因数是指单自由度结构在动力荷载作用下，质点处的最大动力位移与静力位移（即将动力荷载的最大值当作静力荷载作用时产生的位移）比值。
（2）简谐荷载作用下动力因数μ的数值与干扰力频率和自振频率之比θ/ω以及阻尼比ξ有关。
（3）当干扰力与惯性力作用点（即动力荷载作用在质点上）重合时，位移动力因数与内力动力因数是相同的。

7．在杜哈梅积分中时间变量τ与t有什么区别？
答：杜哈梅积分是变上限积分，积分上限t是原函数的自变量，τ是积分变量；t是动力响应发生时刻，τ是瞬时冲量作用的时刻。

8．多自由度结构的柔度矩阵和刚度矩阵中每一元素的含义是什么？怎样求得？何时采用柔度法较好？何时采用刚度法较好？

答：（1）多自由度结构中每一元素的含义分别为：

①柔度矩阵中任一元素 δ_{ij} 含义：在质点 j 施加单位力时，质点 i 处产生的位移；

②刚度矩阵中任一元素 k_{ij} 含义：在质点 j 处发生单位位移时，i 点处产生的约束反力。

（2）柔度矩阵中任一元素可以用图乘法求得；刚度矩阵中任一元素可以用位移法中已知的结论和叠加法求得。

（3）对于多自由度体系，若是静定结构，一般情况下求柔度系数容易些，但对于超静定结构就要根据具体情况而定。若仅从建立运动方程来看，当刚度系数容易求时用刚度法，柔度系数容易求时用柔度法。

9．何谓主振型？在何种情况下多自由度结构才按某一主振型振动？

答：（1）主振型是指在振动过程中，两个质点的位移在数值上随时间而变化，但两者的比值始终保持不变，即结构位移形状保持不变的振动形式。

（2）在特定的初始条件决定下只按某个特定的主振型振动。例如使某一体系按主振型作简谐自由振动的特定初始条件为质点之间初位移的比值应与主振型中质点之间位移的比值相同，或者质点之间初速度的比值与主振型中质点之间位移的比值相同。

10．何谓主振型的正交性？不同的振型对柔度矩阵是否也具有正交性？为什么？

答：（1）主振型的正交性是指不同振型对质量矩阵和刚度矩阵的正交特性。

（2）不同的振型对柔度矩阵具有正交性。

（3）原因：质量矩阵和刚度矩阵都是非奇异的，可逆；故在推导过程中，取逆即可推得不同的振型对柔度矩阵的正交性。

11．图 12-2-1 所示为两个对称结构，试绘出其各主振型的大致形状。杆件本身质量及轴向变形略去不计。（提示：可考虑结构的对称性和振型间的正交性。）

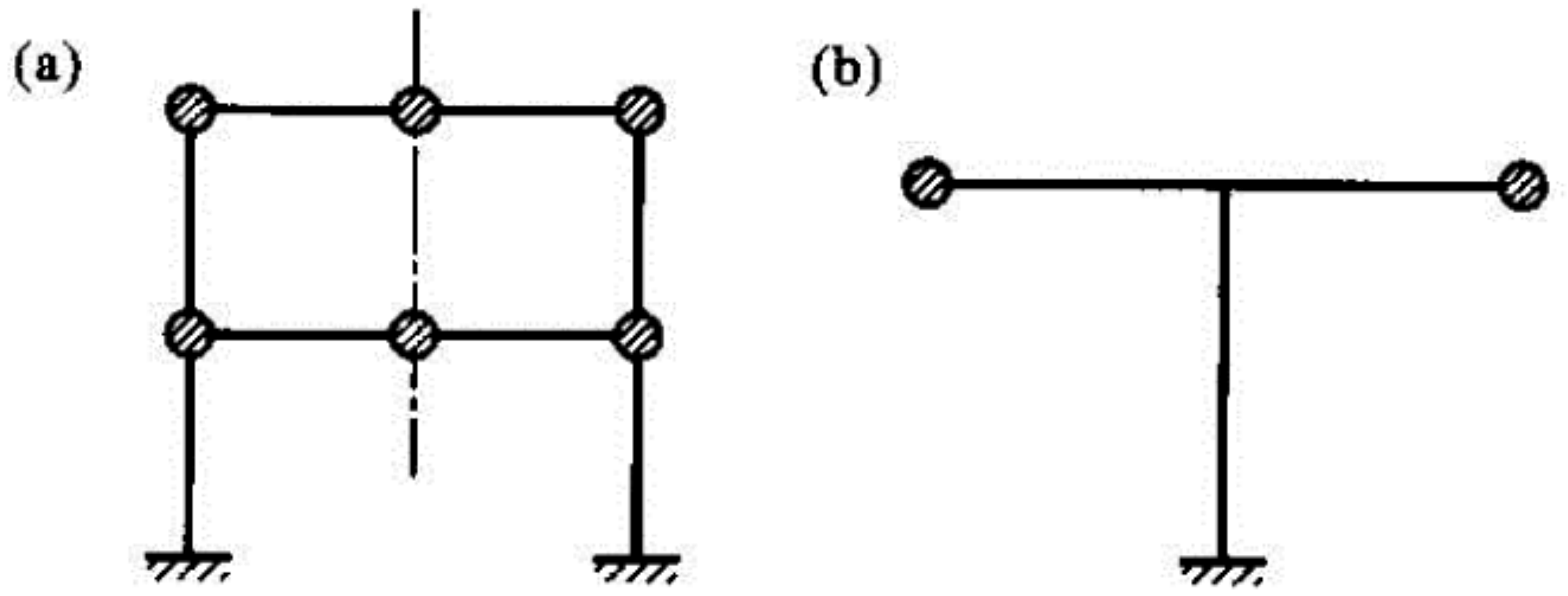


图 12-2-1

答：（a）考虑结构的对称性和振型的正交性，该结构有 4 个主振型，2 个正对称主振型和 2 个反对称主振型。大致形状如图 12-2-2 所示。

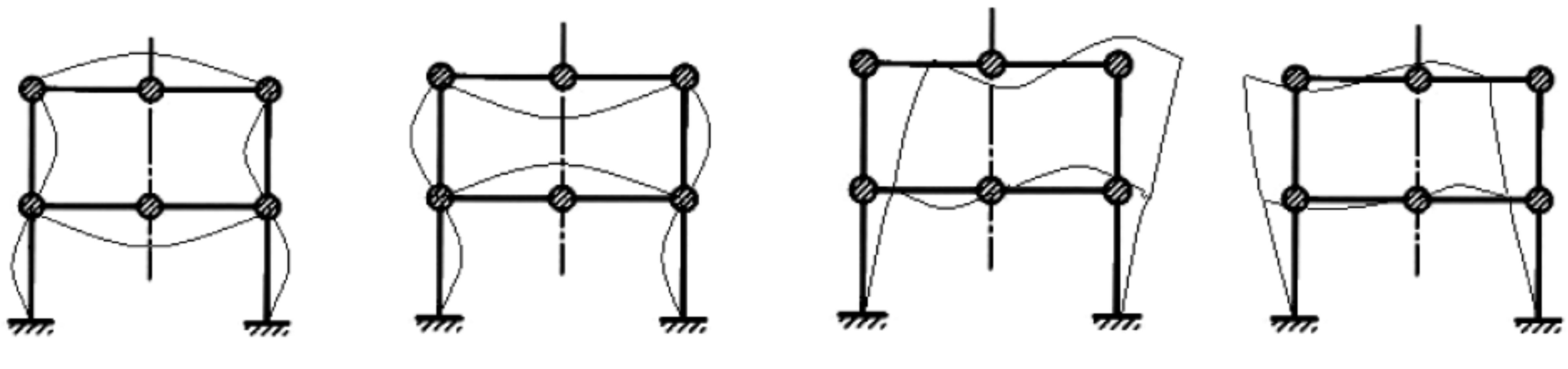


图 12-2-2

（b）考虑结构的对称性和振型的正交性，该结构有 2 个主振型，一个正对称主振型和一个反对称主振型，大致形状如图 12-2-3 所示。

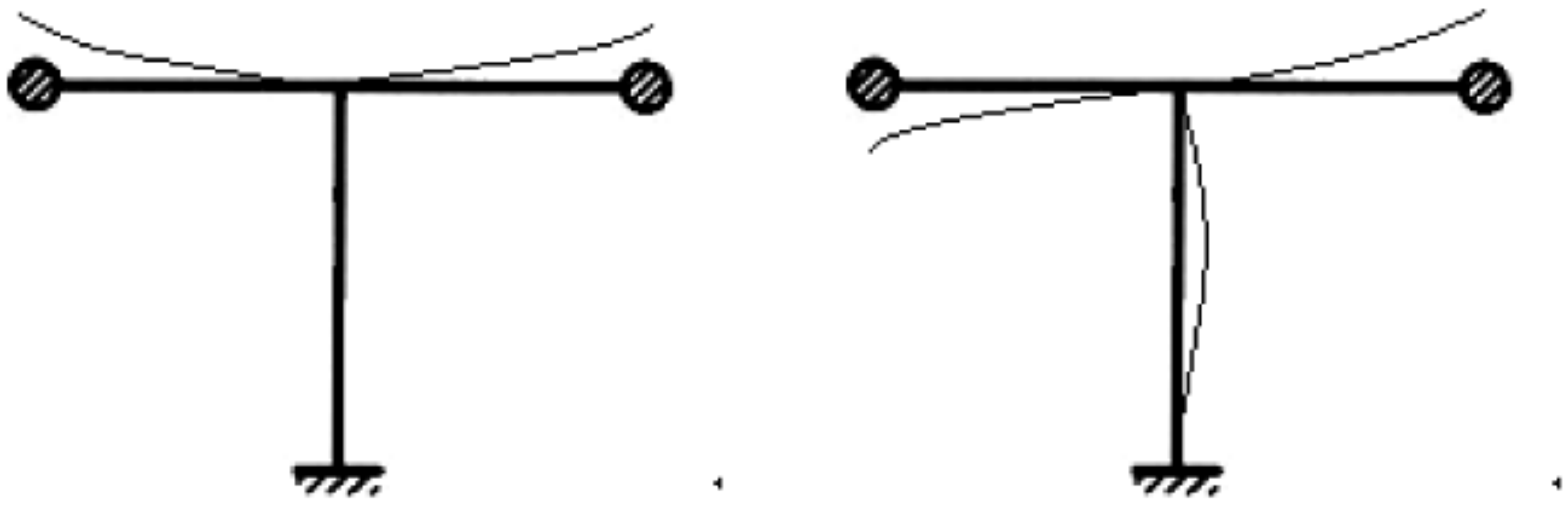


图 12-2-3

12．多自由度结构各质点的位移动力因数是否相等？它们与内力动力因数又是否相等？

答：当干扰力均作用在质点上时，各质点的位移动力因数相等，此时它们与内力动力因数亦相等；除此种情况之外，各质点的位移动力因数不相等，它们与内力动力因数也不相等。

13．单自由度结构与多自由度结构的地震作用有何异同？

答：单自由度结构与多自由度结构的地震作用的异同点：

（1）相同点：应用的原理和方法一致，均为集中质量离散化结构下的动力学基本方程的应用。

（2）不同点：最后的结果单自由度只需考虑整体结构在一个主振型下的受力即可，而多自由度需要分层考虑，综合不同振型对于不同层的地震作用。

14．在能量法中采用某静载作用下的位移近似作为第一振型来求最低频率时，对图 12-2-4 所示两结构应怎样加载才能使结果较准确？

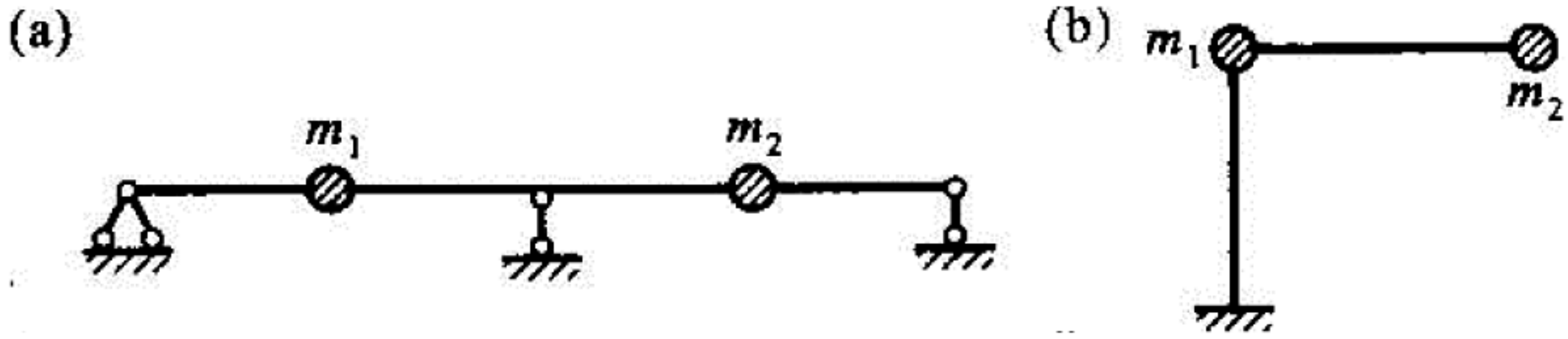


图 12-2-4

答：（a）图为两跨连续梁，在每跨内均施加均布荷载 q，算得的结果更准确。

（b）图为悬臂结构，在质点 2 处施加竖向集中力 P，算得的结果更准确。

习题

12-1　试确定图 12-2-5 所示各结构的振动自由度。各集中质点略去其转动惯量，杆件质量除注明者外略去不计，杆件轴向变形忽略不计。

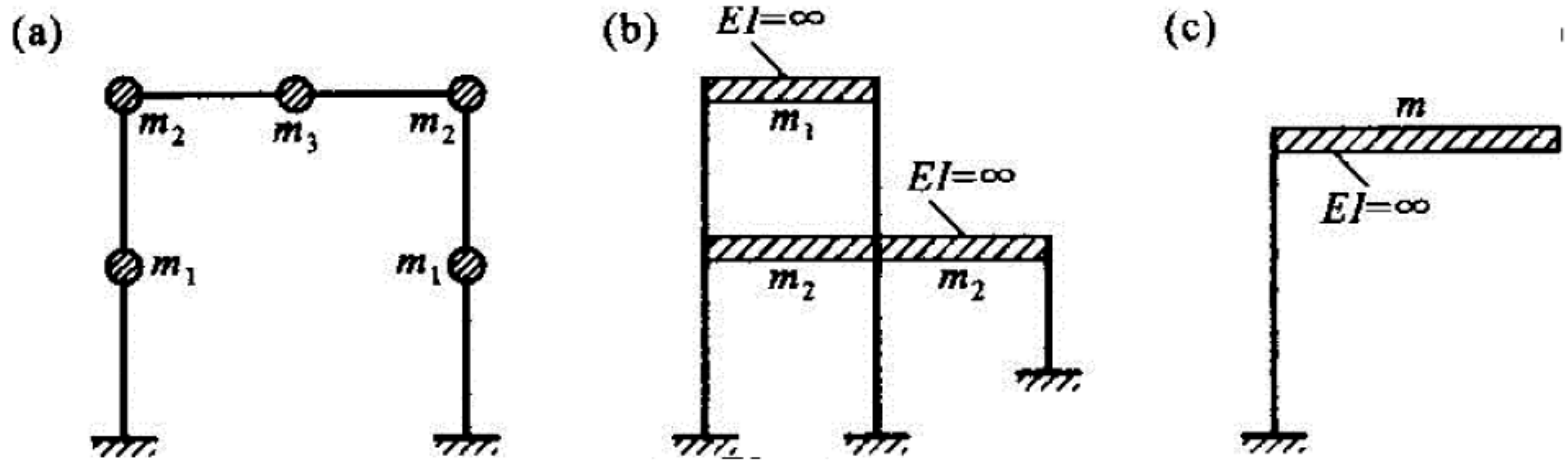


图 12-2-5（题 12-1）

答：（a）有 4 个振动自由度，3 个水平自由度和 1 个竖向自由度。

（b）有 2 个水平自由度。

（c）有 2 个振动自由度，1 个水平自由度和 1 个竖向自由度。

12-2　试列出图示结构的振动微分方程，不计阻尼。[提示：（a）列动力平衡方程$\sum M_A=0$较简便；（b）列位移方程较简便。]

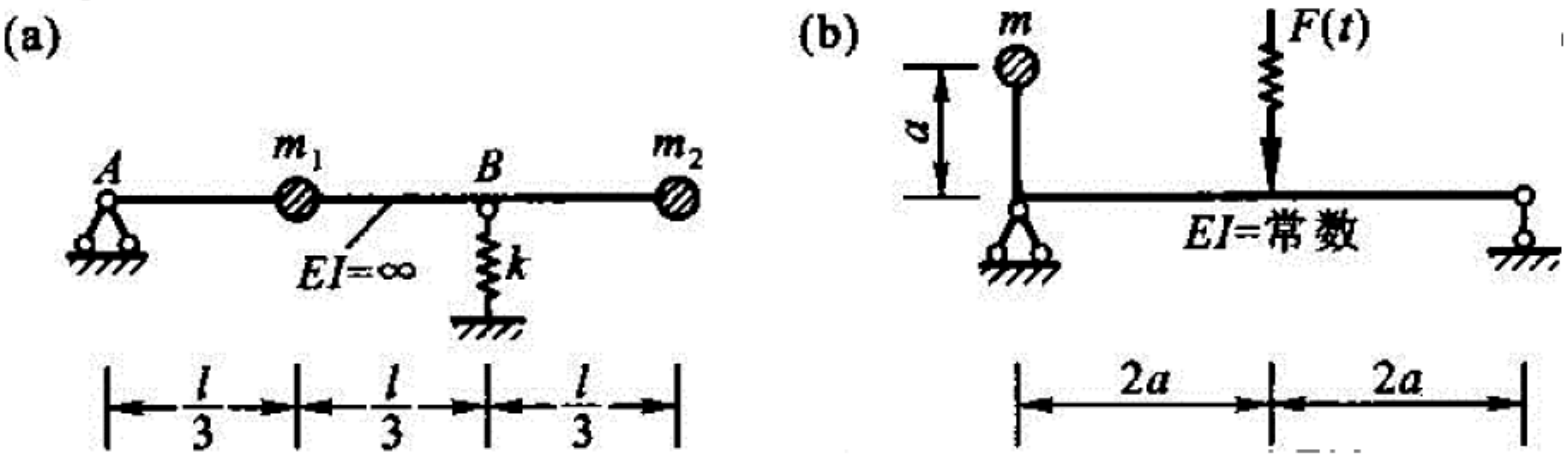


图 12-2-6（题 12-2）

解：（a）如图 12-2-7 所示，利用$\sum M_A=0$列平衡方程（即达朗贝尔定理），得

$$-m_1\ddot{y}_1\frac{l}{3}-m_2\ddot{y}_2 l-ky_B\frac{2l}{3}=0$$

又

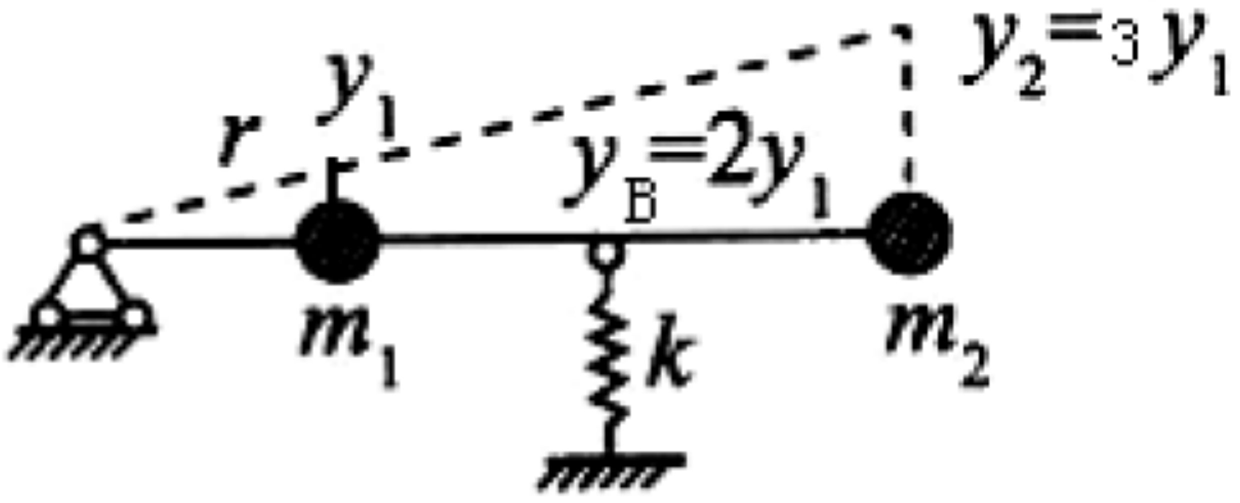
$$y_B=2y_1 \quad y_2=3y_1$$

即

$$-m_1\ddot{y}_1\frac{l}{3}-m_2(3\ddot{y}_1)l-k(2y_1)\frac{2l}{3}=0$$

化简得

$$\ddot{y}_1+\frac{4k}{m_1+9m_2}y_1=0$$



图解 12-2-7

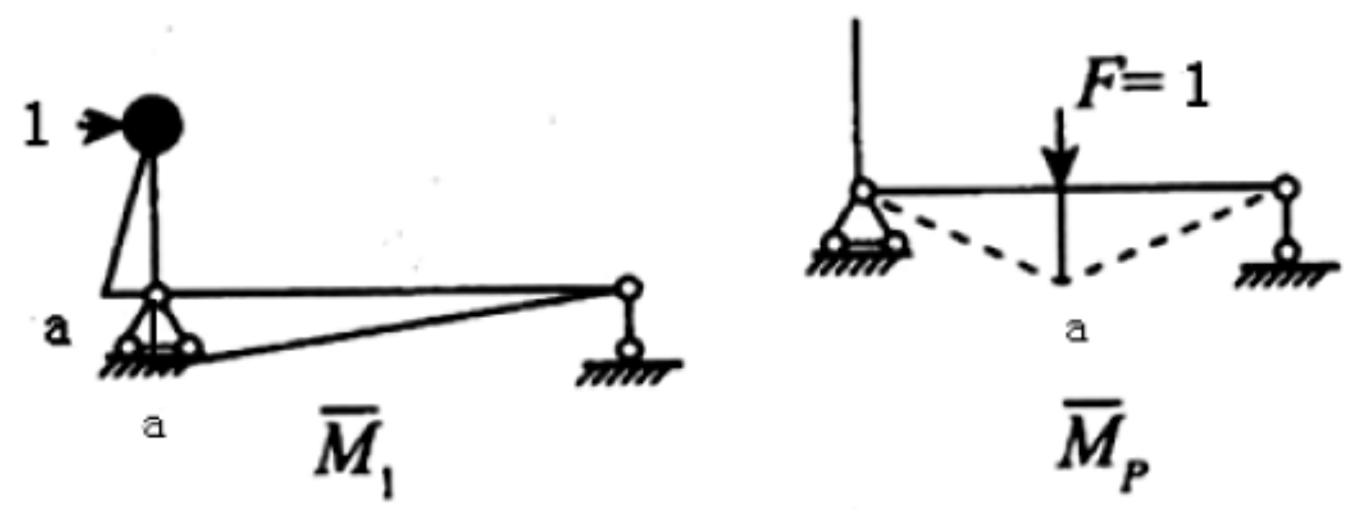


图 12-2-8

（b）列位移方程，先画出$\bar{M}_1$图和$\bar{M}_p$图，如图 12-2-8 所示，图乘法算出柔度系数如下

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}(\frac{1}{2}\times a\times a\times\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}\times 4a\times a\times\frac{2}{3}a)=\frac{5a^3}{3EI}$$
$$\delta_{1P}=\frac{1}{EI}[\frac{1}{2}\times 2a\times\frac{a}{2}\times\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}\times 2a\times a\times(\frac{2}{3}\times\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\times a)=\frac{a^3}{EI}$$

可列运动方程

$$y=\delta_{11}(-m\ddot{y})+\delta_{1p}F(t)$$

即

$$\ddot{y}+\frac{3EI}{5a^3m}y=\frac{3F(t)}{5m}$$

12-3　试求图示各结构的自振频率。略去杆件自重及阻尼影响。

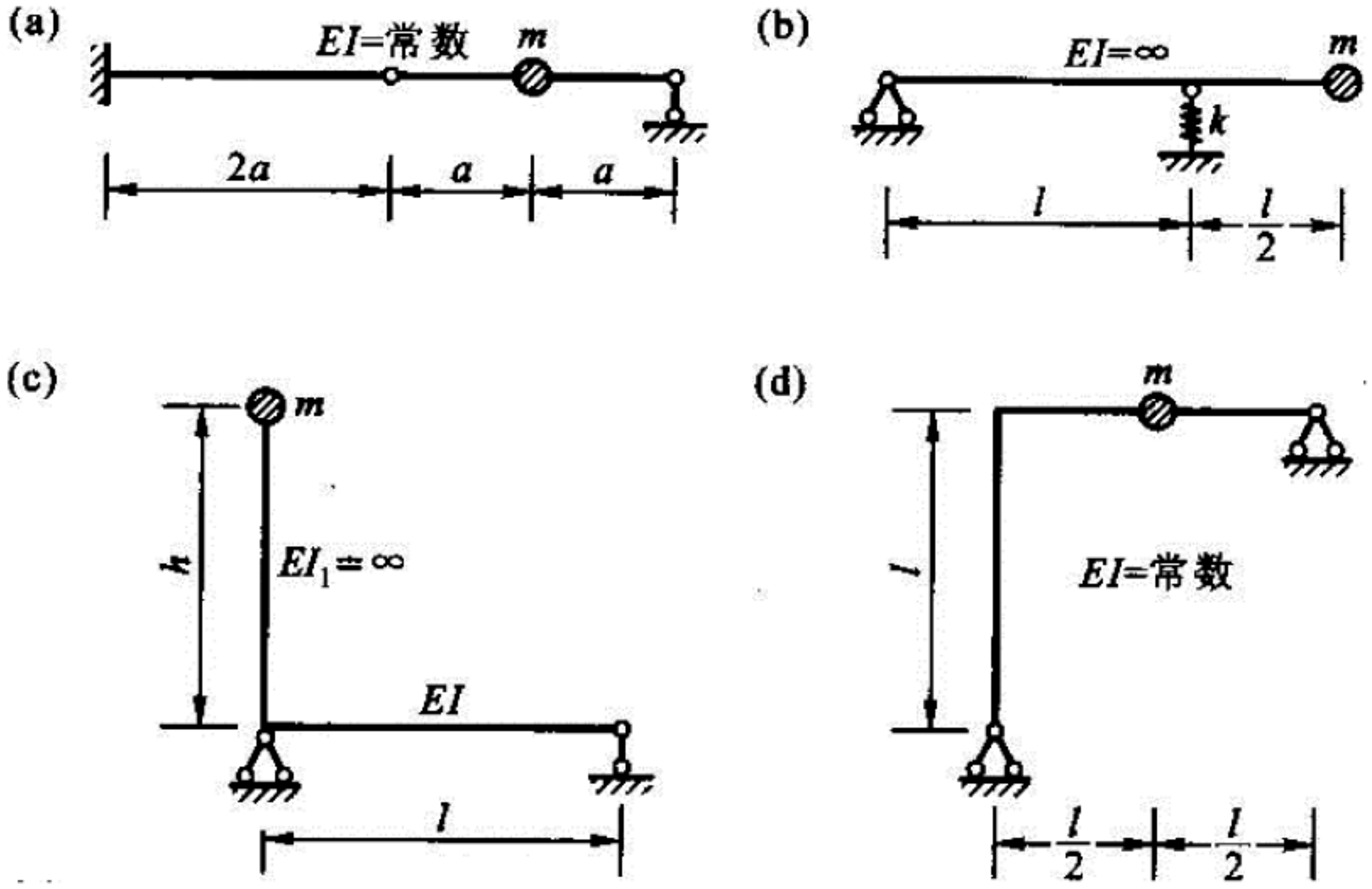


图 12-2-9（题 12-3）

解：（a）求柔度系数，画出 $\bar{M}_1$ 图，如图 12-2-10 所示，图乘法得

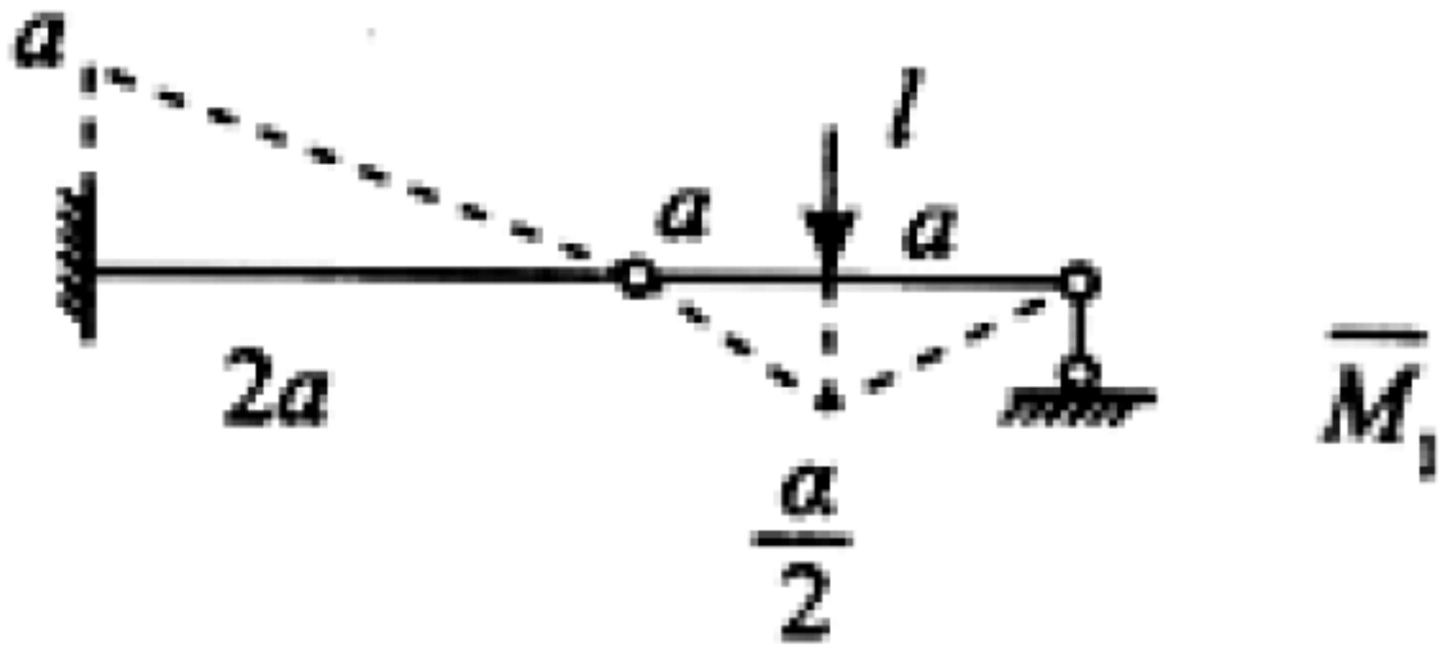


图 12-2-10

$$\delta_{11}=(\frac{1}{2}\times 2a\times a\times\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}\times a\times\frac{a}{2}\times\frac{2}{3}\times 2)\frac{1}{EI}=\frac{5a^3}{6EI}$$

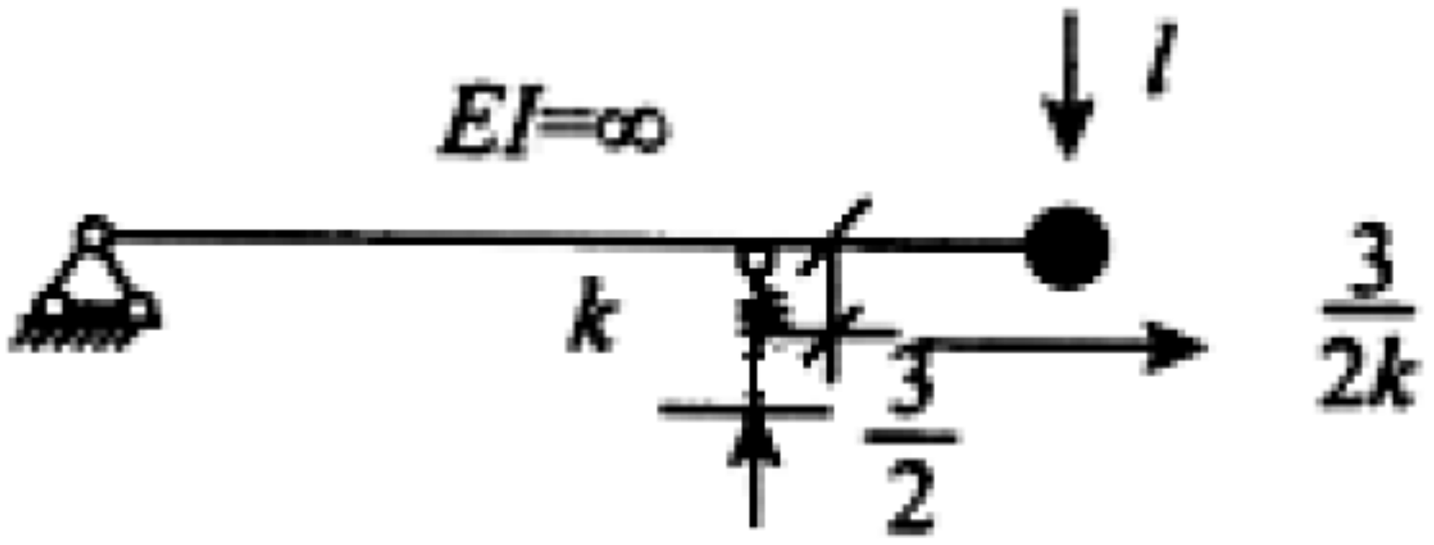
又

$$k=\frac{1}{\delta},\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

故

$$\omega=\sqrt{\frac{6EI}{5a^3m}}$$

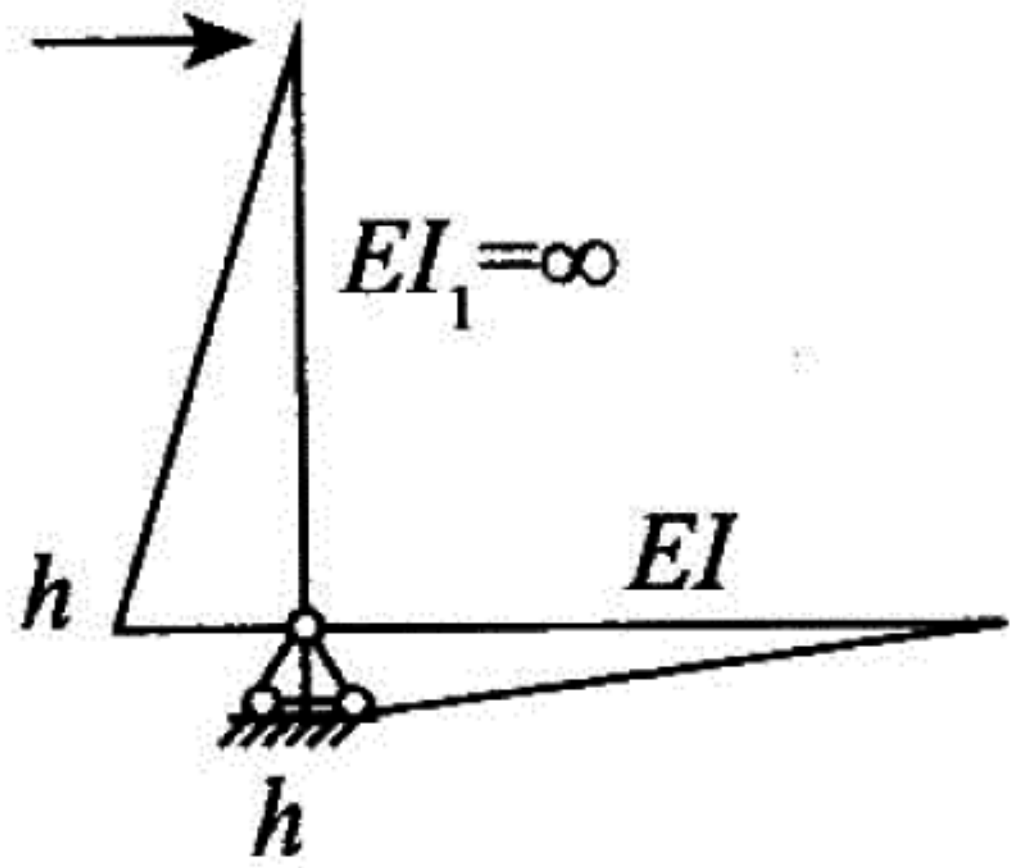
（b）此杆件为刚体，如图 12-2-11 所示，求解自振频率具体如下



图解 12-2-11

$$\delta_{11}-\sum\bar{R}_C=-(-\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2k})=\frac{9}{4k}，\quad \omega=\sqrt{\frac{4k}{9m}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

（c）柔度法求解，如图 12-2-12 所示，自振频率的求解具体如下



图解 12-2-12

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\frac{lh}{2}\cdot\frac{2h}{3}=\frac{lh^2}{3EI}，\quad \omega=\sqrt{\frac{3EI}{h^2lm}}$$

（d）该结构为超静定，绘出弯矩图 $\bar{M}_1$ 图和 $\bar{M}_0$ 图，如图 12-2-13 所示，自振频率如下

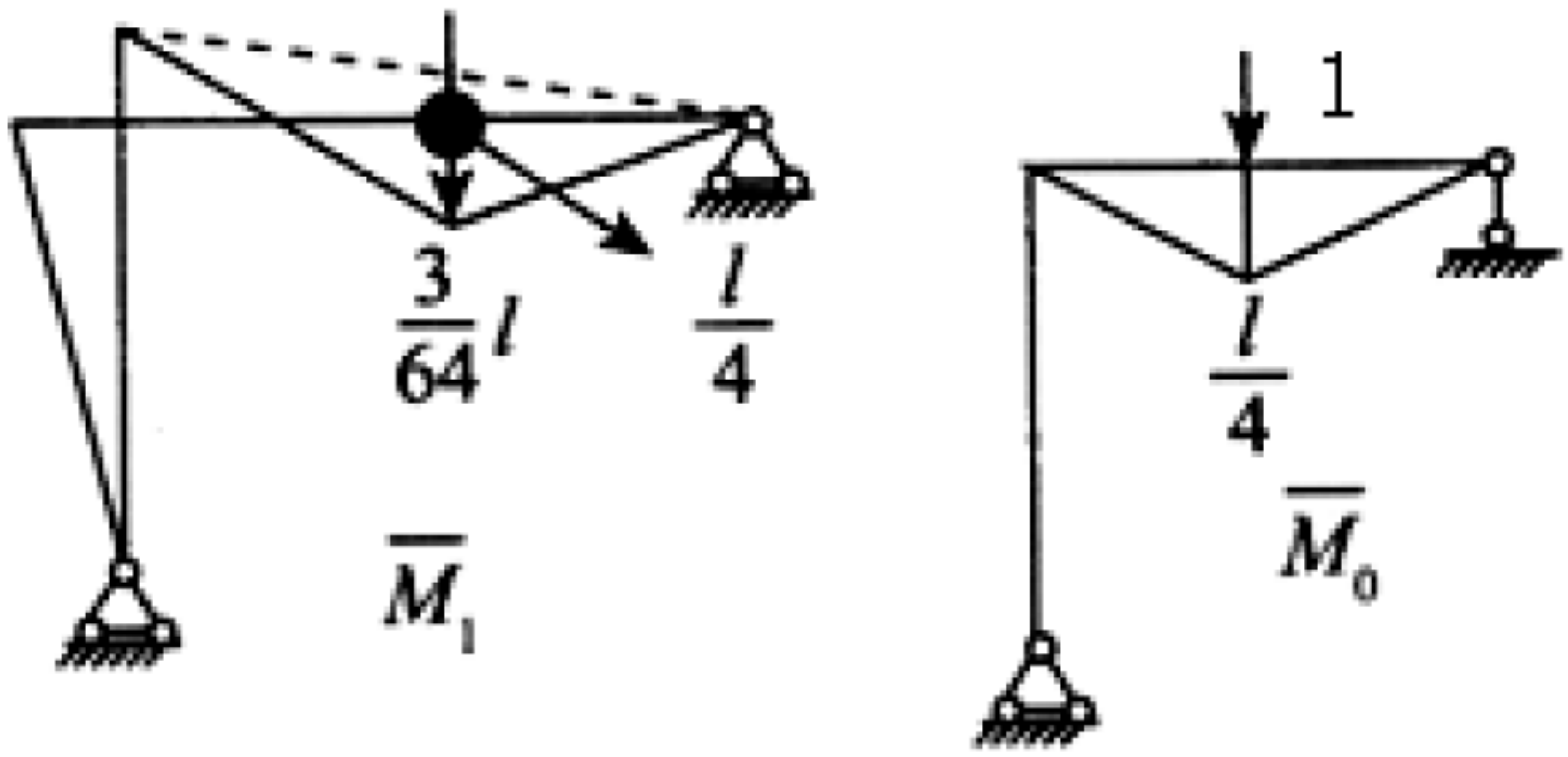


图 12-2-13

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(\frac{l^3}{48}-\frac{1}{2}l\frac{l}{4}\frac{3l}{64}\right)$$
$$=\frac{l^3}{EI}\left(\frac{1}{48}-\frac{3}{512}\right)$$
$$=\frac{23}{1536}\frac{l^3}{EI}=0.014974\frac{l^3}{EI}$$
$$w=\sqrt{\frac{1536EI}{23l^3m}}=\sqrt{66.78\frac{EI}{ml^3}}=8.172\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

12-4　试求题 12-2a 所示结构的自振频率。

解：由 12-2a 结果知，结构的运动方程为

$$\ddot{y}_1+\frac{4k}{m_1+9m_2}y_1=0$$

故

$$\omega=\sqrt{\frac{4k}{m_1+9m_2}}$$

12-5　试求图示桁架的自振频率。已知质量 m 重为 mg＝40kN，g＝9.81m / s^2，桁架各杆截面相同，A＝2×$10^{-3}$$m^2$，E＝210GPa，并设桁架各杆自重及质量 m 的水平运动均可略去不计。

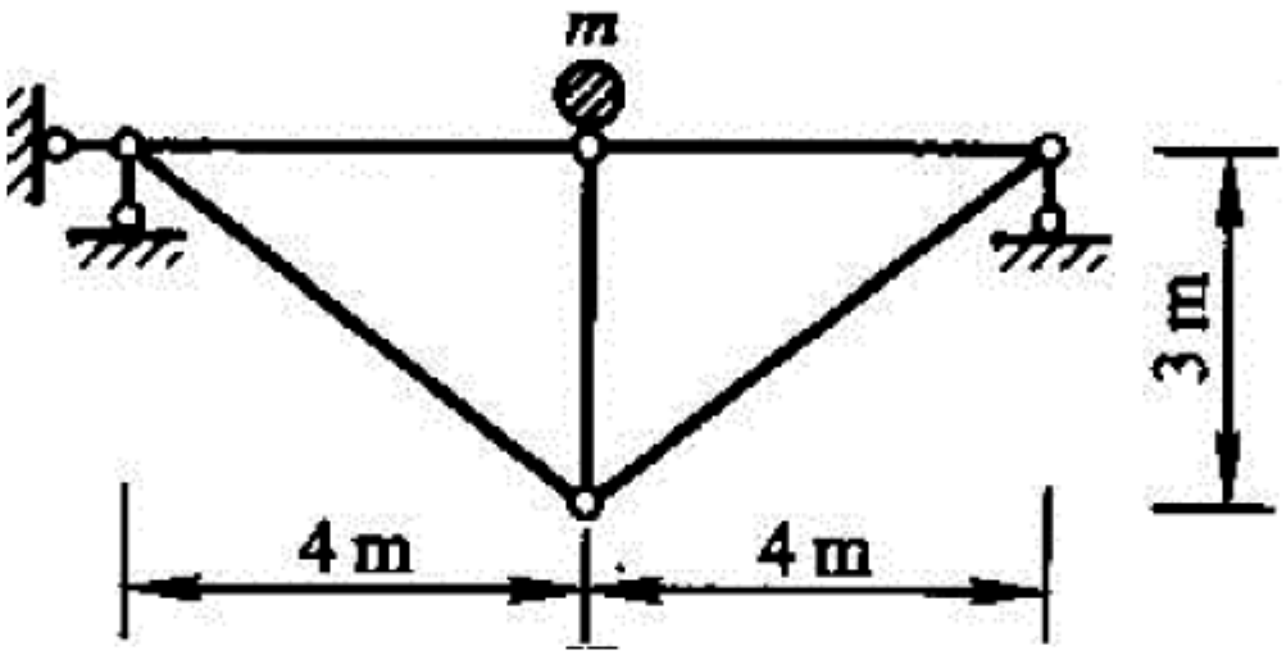


图 12-2-14（题 12-5）

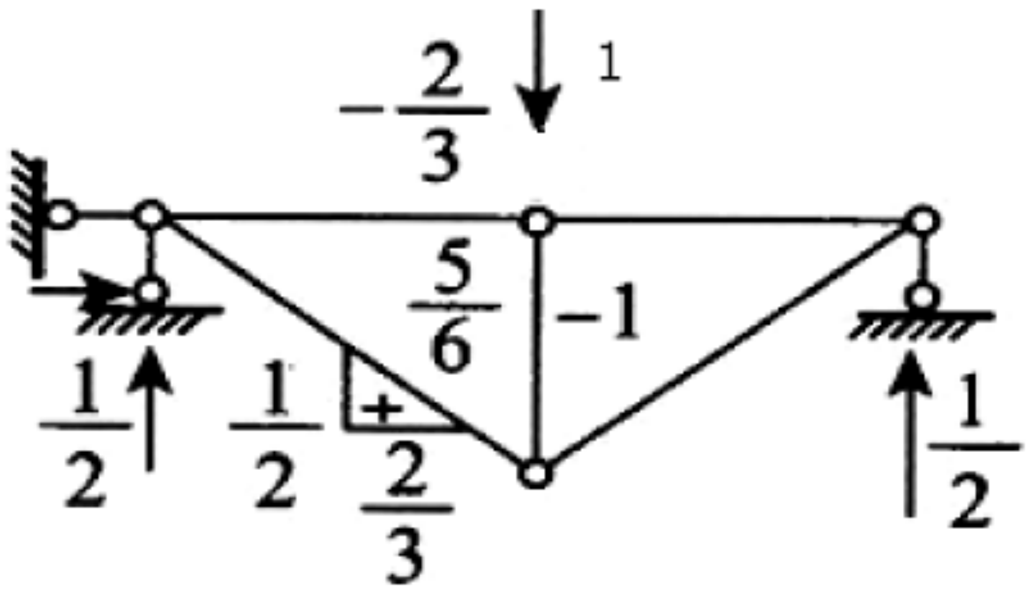


图 12-2-15

解：柔度法求解，如图 12-2-15 所示，具体计算如下

$$\delta_{11}=\frac{1}{EA}\left[2\left(\frac{5}{6}\right)^2 5+2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 4+(-1)^2 3\right]$$
$$=\frac{243}{18EA}=\frac{13.5}{EA}$$
$$\omega=\sqrt{\frac{EA}{13.5m}}$$
$$=\sqrt{\frac{9.81\times210\times10^9\times2\times10^{-3}}{13.5\times40\times10^3}}=87.3s^{-1}$$

12-6　试求图示刚架侧移振动时的白振频率和周期。横梁的刚度可视为无穷大，重量为 mg＝200kN（柱子的部分重量已集中到横梁处，不需另加考虑），g＝9.81m / s^2，柱的 EI＝5×10^4kN·m^2。

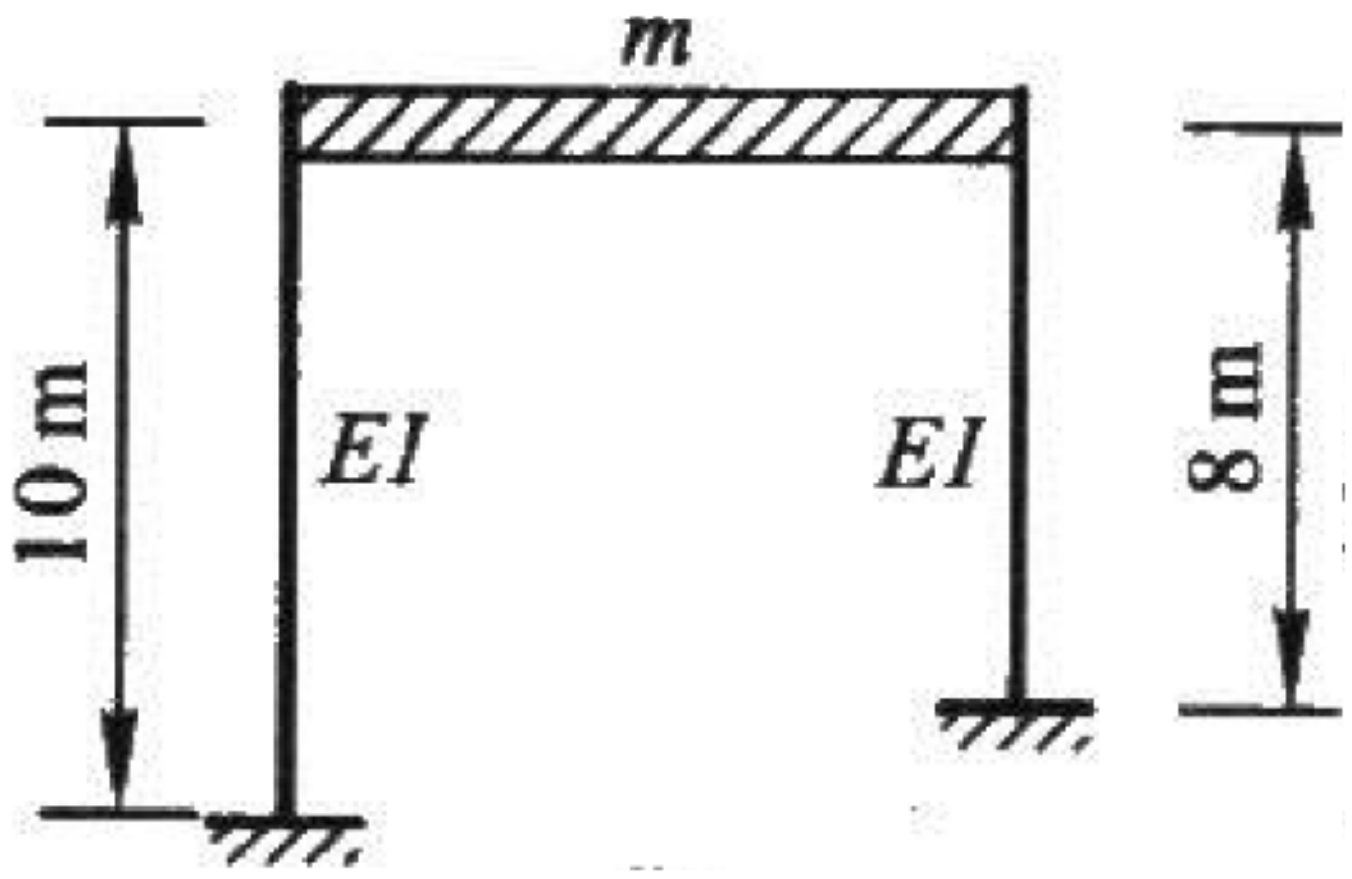


图 12-2-16（题 12-6）

解：由力法知，该结构一根柱子的刚度 $k=\dfrac{12EI}{l^3}$，则

$$k_{11}=\frac{12EI}{l_1^3}+\frac{12EI}{l_2^3}=12\times5\times10^4\times\left(\frac{1}{10^3}+\frac{1}{8^3}\right)=1771.9\mathrm{kN/m}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{1771.9\times9.81}{200}}=9.32s^{-1}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=0.674\mathrm{s}$$

12-7　在题 12-6 中若初始位移为 10mm，初始速度为 0.1m / s。试求振幅值和 t＝1s 时的位移值。

解：具体计算如下

$$a=\sqrt{A^2+\left(\frac{v}{\omega}\right)^2}=\sqrt{0.01^2+\left(\frac{0.1}{9.32}\right)^2}=0.01467\mathrm{m}=14.67\mathrm{mm}$$

$$\psi=\arctan\left(\frac{A}{v/\omega}\right)=\arctan\left(\frac{0.01}{0.1/9.32}\right)=0.75rad$$

故

$$y_{t=1}=14.67\sin(9.32\times1+0.75)=-8.82\mathrm{mm}。$$

12-8　在题 12-6 中若阻尼比 ξ＝0.05，试求自振频率及周期。若 y_0＝10mm，y_0＝0.1m / s。求 t＝1s 时位移是多少？

解：已知

$$\xi=0.05,y_0=10\mathrm{mm},\dot{y}_0=0.1\mathrm{m/s}$$

则

$$\omega'=2\sqrt{1-\varepsilon^2}=9.32\sqrt{1-0.05^2}=9.30\mathrm{s}^{-1}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=0.676\mathrm{s}$$

$$k=\xi\omega=0.05\times9.32=0.4661\mathrm{s}^{-1}$$

$$b=\sqrt{(0.01)^2+\left(\frac{0.1+0.466\times0.01}{9.30}\right)^2}=0.01505\mathrm{m}=15.05\mathrm{mm}$$

$$\psi'=\arctan\left(\frac{\omega' A}{v+kA}\right)=\arctan\left(\frac{9.3\times0.01}{0.1+0.466\times0.01}\right)=0.726\mathrm{rad}$$

故 t＝1s 时位移为

$$y_{t=1}=15.05e^{-0.4661}\sin(9.30\times1+0.726)=-5.34\text{mm}$$

12-9　图示悬臂梁具有一重量 mg＝12kN 的集中质量，其上受有振动荷载 Fsinθt，其中 F＝5kN。若不考虑阻尼，试分别计算该梁在振动荷载为每分钟振动 300 次和 600 次两种情况下的最大竖向位移和最大负弯矩。已知 l＝2m，E＝210GPa，I＝3.4×$10^{-5}$$m^4$。梁的自重可略去不计。

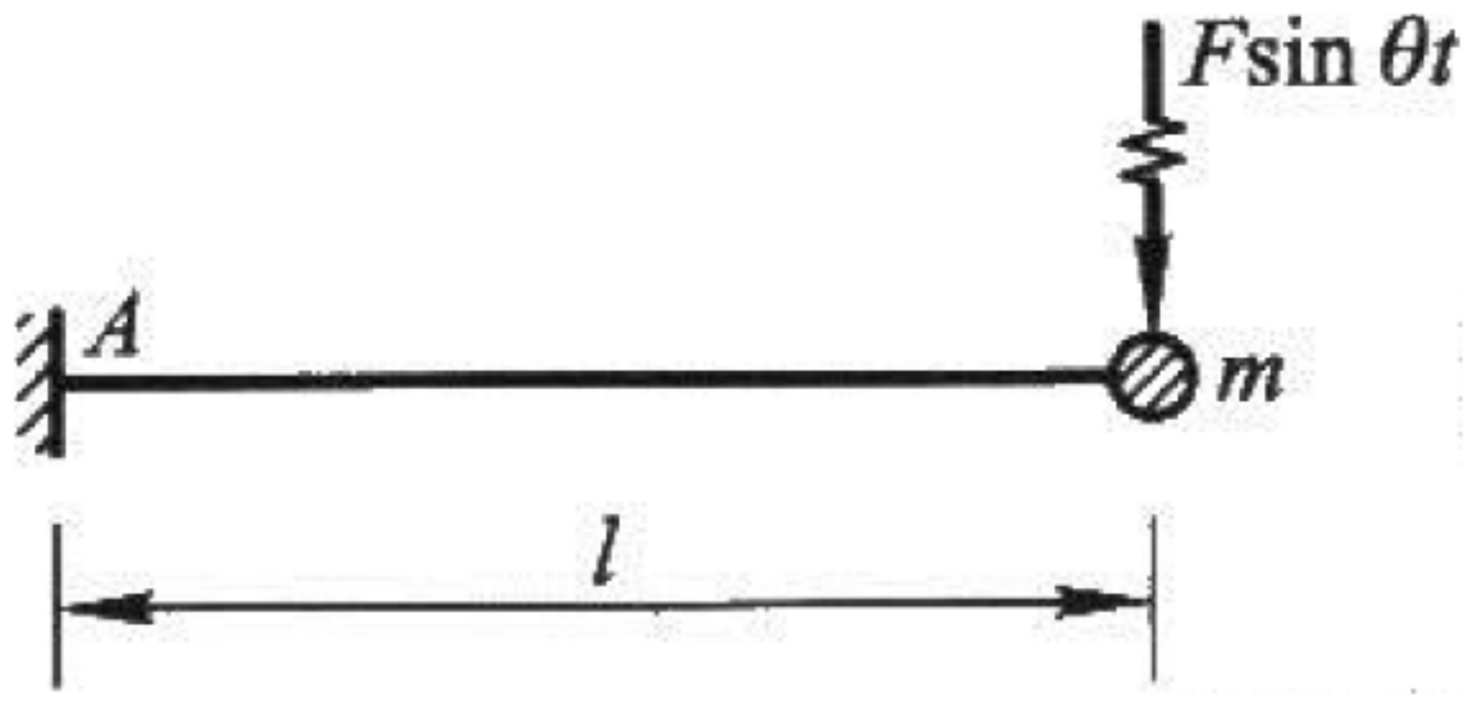


图 12-2-17（题 12-9）

解：自振频率：

$$\omega=\sqrt{\frac{3EIg}{Gl^3}}=\sqrt{\frac{3\times210\times10^9\times3.4\times10^{-5}\times9.81}{12\times10^3\times2^3}}=\sqrt{2189}=46.79s^{-1}.$$

（1）该梁在振动荷载为每分钟振动 300 次的最大竖向位移和最大负弯矩如下

$$\theta=\frac{300\times2\pi}{60}=10\pi$$

$$u=\frac{1}{1-\left(\frac{10\pi}{w}\right)^2}=\frac{1}{1-\frac{(10\pi)^2}{2189}}=1.821$$

$$\Delta_{max}=\frac{(12+5\times1.821)10^3\times2^3}{3\times210\times10^9\times3.4\times10^{-5}}=0.00788\text{m}=7.88\text{mm}$$

$$M_{负max}=-(12+5\times1.821)\times2=-42.2\text{kN}\cdot\text{m}$$

（2）该梁在振动荷载为每分钟振动 600 次的最大竖向位移和最大负弯矩如下

$$\theta=\frac{600\times2\pi}{60}=20\pi$$

$$u=\frac{1}{1-\frac{(20\pi)^2}{2189}}=-1.244$$

$$\Delta_{max}=\frac{(12+5\times1.244)\times10^3\times2^3}{3\times210\times10^9\times3.4\times10^{-5}}=0.00681\text{m}=6.81\text{mm}$$

$$M_{max}=-(12+5\times1.244)\times2=-36.4\text{kN}\cdot\text{m}$$

12-10　测得某结构自由振动经过 10 个周期后振幅降为原来的 5%。试求阻尼比和在简谐干扰力作用下共振时的动力因数。

解：由公式得

$$\ln\frac{1}{0.05}\approx2\pi\times10\xi$$

即

$$\xi \approx \frac{\ln 20}{2\pi} = 0.0477$$

当共振时，动力因数计算得

$$\mu \approx \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2 \times 0.0477} = 10.5$$

12-11　爆炸荷载可近似用图 12-2-18 所示规律表示，即若不考虑阻尼，试求单自由度结构在此种荷载作用下的动力位移公式。设结构原处于静止状态。

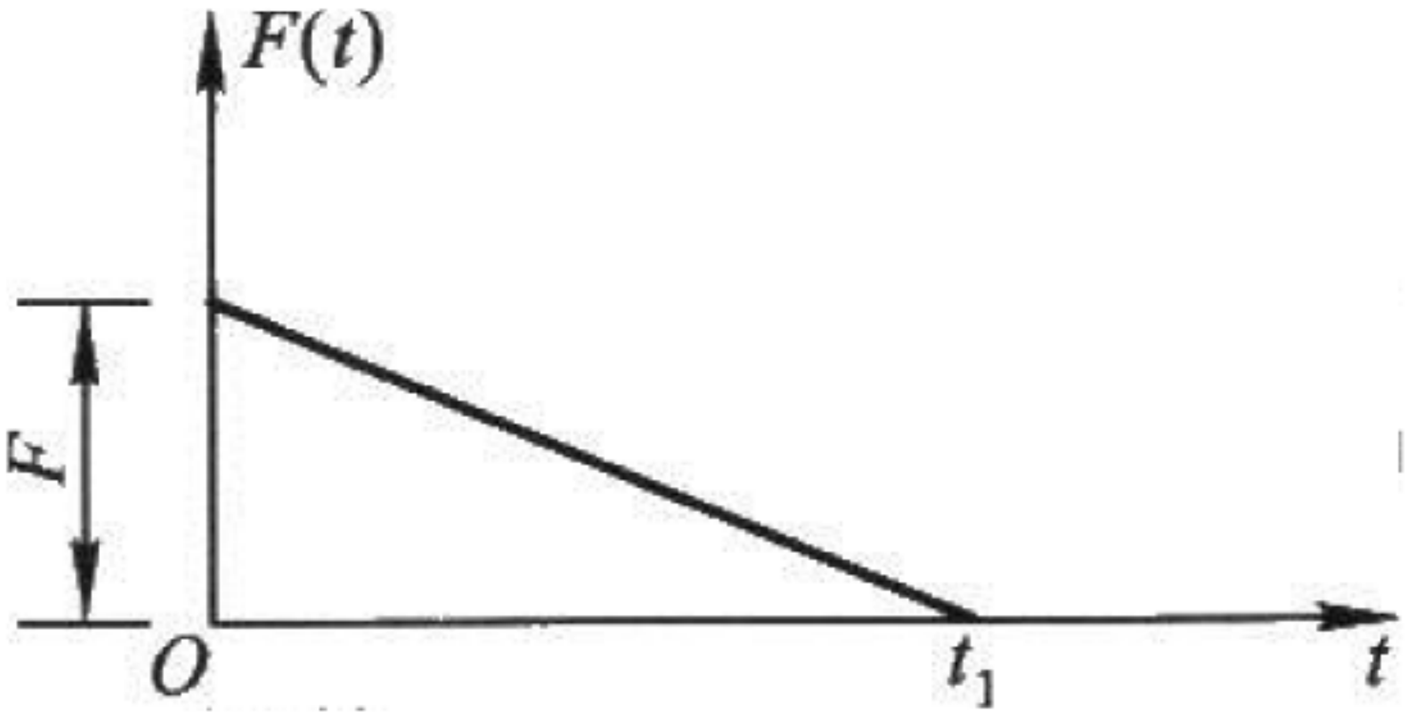


图 12-2-18（题 12-11）

$$F(t) = \begin{cases} F\left(1 - \dfrac{t}{t_1}\right) & (t \leqslant t_1) \\ 0 & (t \geqslant t_1) \end{cases}$$

解：当$t \leqslant t_1$时，位移 y 的计算公式如下

$$y = \frac{1}{m\omega}\int_0^t F(1 - \frac{\tau}{t_1})\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{F}{m\omega}\int_0^t [\sin\omega(t-\tau) - \frac{\tau}{t_1}\sin\omega(t-\tau)]d\tau$$

进一步积分得到位移 y 的表达式如下

$$y = \frac{F}{m\omega^2}[\cos\omega(t-\tau) - \frac{\tau}{t_1}\cos\omega(t-\tau) - \frac{1}{t_1\omega}\sin\omega(t-\tau)]_0^t$$

$$= y_{st}(1 - \cos\omega t + \frac{\sin\omega t}{\omega t_1} - \frac{t}{t_1})$$

当 $t \geqslant t_1$时，位移 y 的计算公式如下

$$y = \frac{1}{m\omega}\int_0^{t_1} F(1 - \frac{\tau}{t_1})\sin\omega(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{F}{m\omega^2}[\cos\omega(t-\tau) - \frac{\tau}{t_1}\cos\omega(t-\tau) - \frac{1}{t_1\omega}\sin\omega(t-\tau)]_0^{t_1}$$

$$= \frac{F}{m\omega^2}[\cos\omega(t-t_1) - \cos\omega t - \cos\omega(t-t_1) - \frac{\sin\omega(t-t_1)}{t_1\omega} + \frac{\sin\omega t}{t_1\omega}]$$

$$= y_{st}(-\cos\omega t + \frac{\sin\omega t - \sin\omega(t-t_1)}{\omega t_1})$$

12-12　试求图示梁的自振频率和主振型。梁的自重可略去不计，EI＝常数。

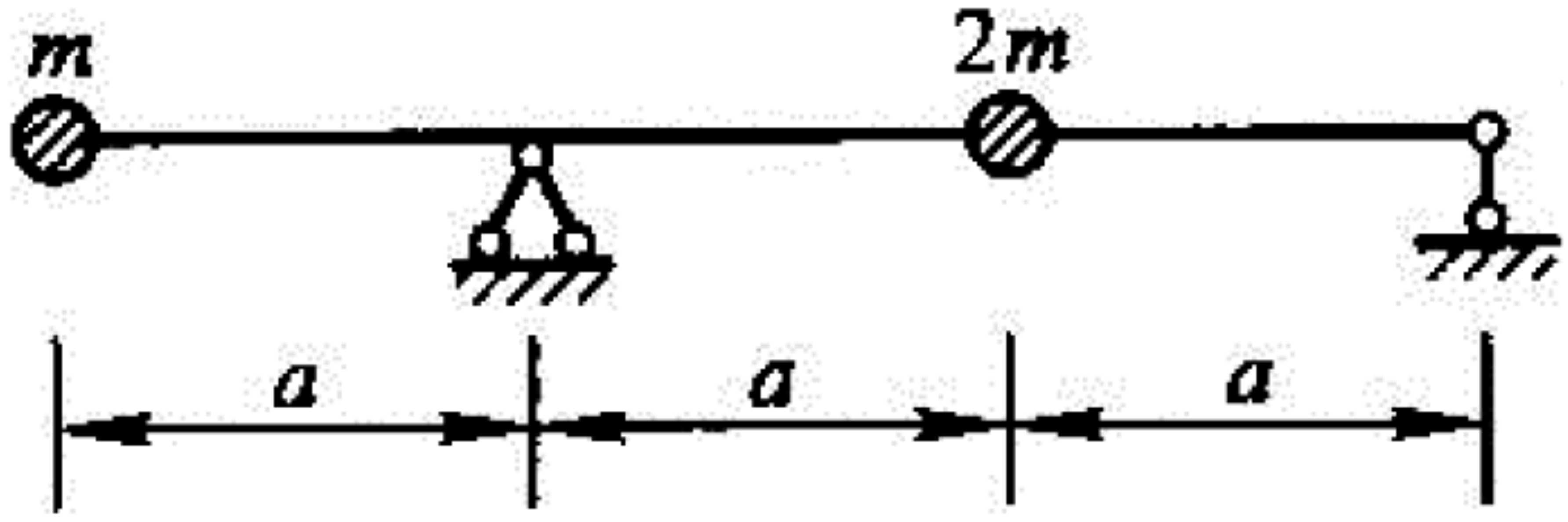


图 12-2-19（题 12-12）

解：首先绘制出 $\overline{M}_1$ 图和 $\overline{M}_2$ 图，如图 12-2-20 所示。

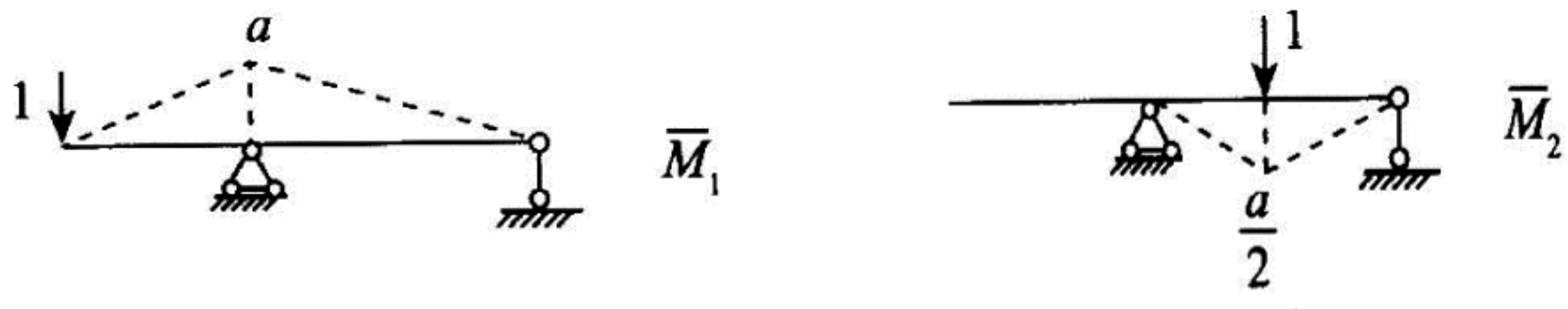


图 12-2-20

计算柔度系数为

$$\delta_{11}=\frac{a^3}{EI},\delta_{22}=\frac{a^3}{6EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=-\frac{a^3}{4EI}$$

自振频率和振型的计算如下

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pm\sqrt{\frac{51}{54}}\right)\frac{ma^3}{EI}=\begin{Bmatrix}1.1526\\0.18075\end{Bmatrix}\frac{ma^3}{EI}$$

$$\omega_{1,2}=\begin{Bmatrix}0.931\\2.352\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$\rho_1=\frac{1.1526-1}{-\frac{1}{4}\times2}=-0.305,\quad \rho_2=\frac{0.18075-1}{-\frac{1}{4}\times2}=1.638$$

根据上述计算结果绘制出主振型的示意图 12-2-21 所示。

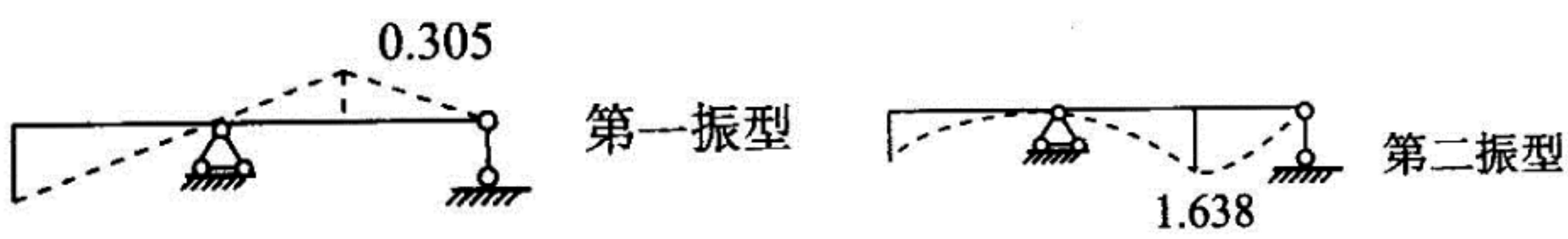


图 12-2-21

12-13　试求图示梁的自振频率和主振型。梁的自重可略去不计，EI＝常数。

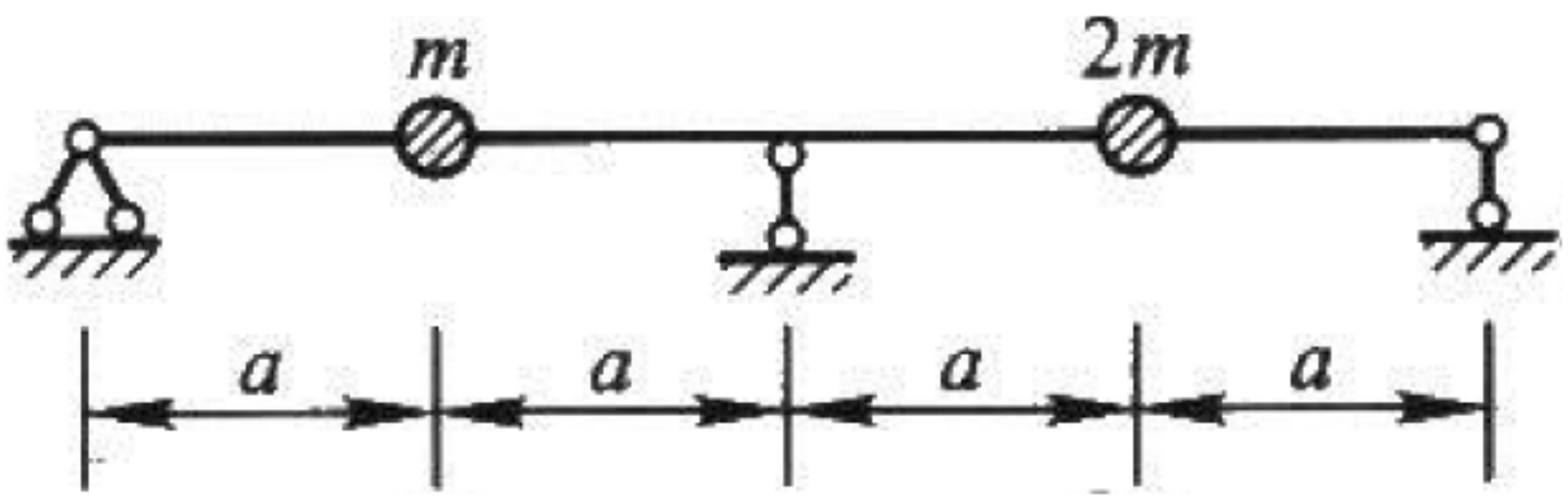


图 12-2-22（题 12-13）

解：此结构为超静定结构，首先绘制出 $\overline{M}_1$ 图、$\overline{M}_1^0$ 图以及 $\overline{M}_2^0$ 图，如图 12-2-23 所示。

计算柔度系数

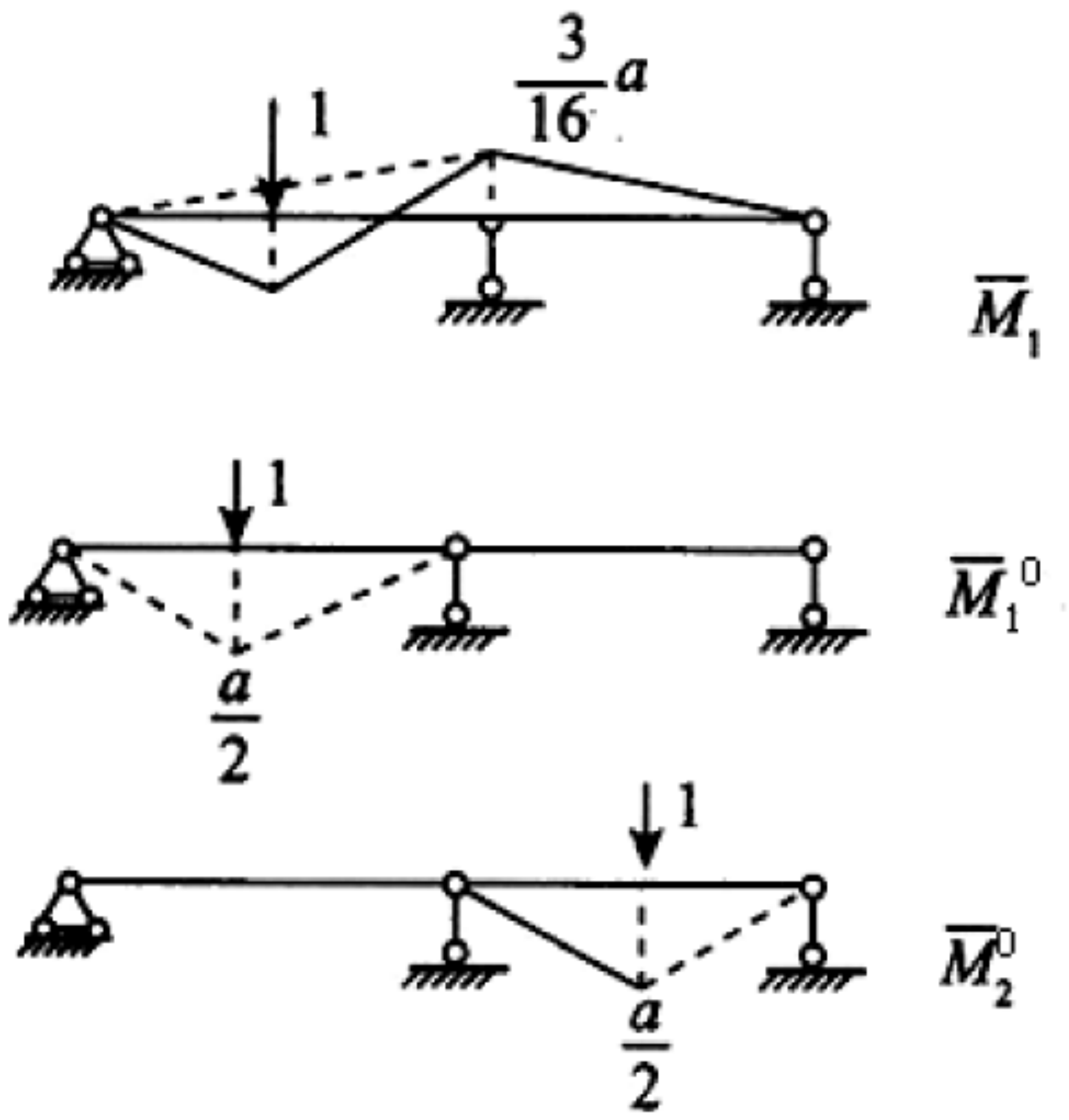


图 12-2-23

$$\delta_{11}=\delta_{22}=\frac{23a^3}{192EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{-3a^3}{64EI}$$

再计算自振频率和振型如下

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)_{1,2}=\frac{1}{2}(0.359375\pm0.178685)\frac{ma^3}{EI}$$

$$=\begin{Bmatrix}0.2690\\0.09034\end{Bmatrix}\frac{ma^3}{EI}$$

$$\omega_{1,2}=\begin{Bmatrix}1.928\\3.327\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

$$\rho_1=\frac{0.2690-\frac{23}{192}\times1}{-\frac{3}{64}\times2}=-1.592$$

$$\rho_2=\frac{0.090034-\frac{23}{192}\times1}{-\frac{3}{64}\times2}=0.314$$

根据上述计算结果绘制出主振型的示意图 12-2-24 所示。

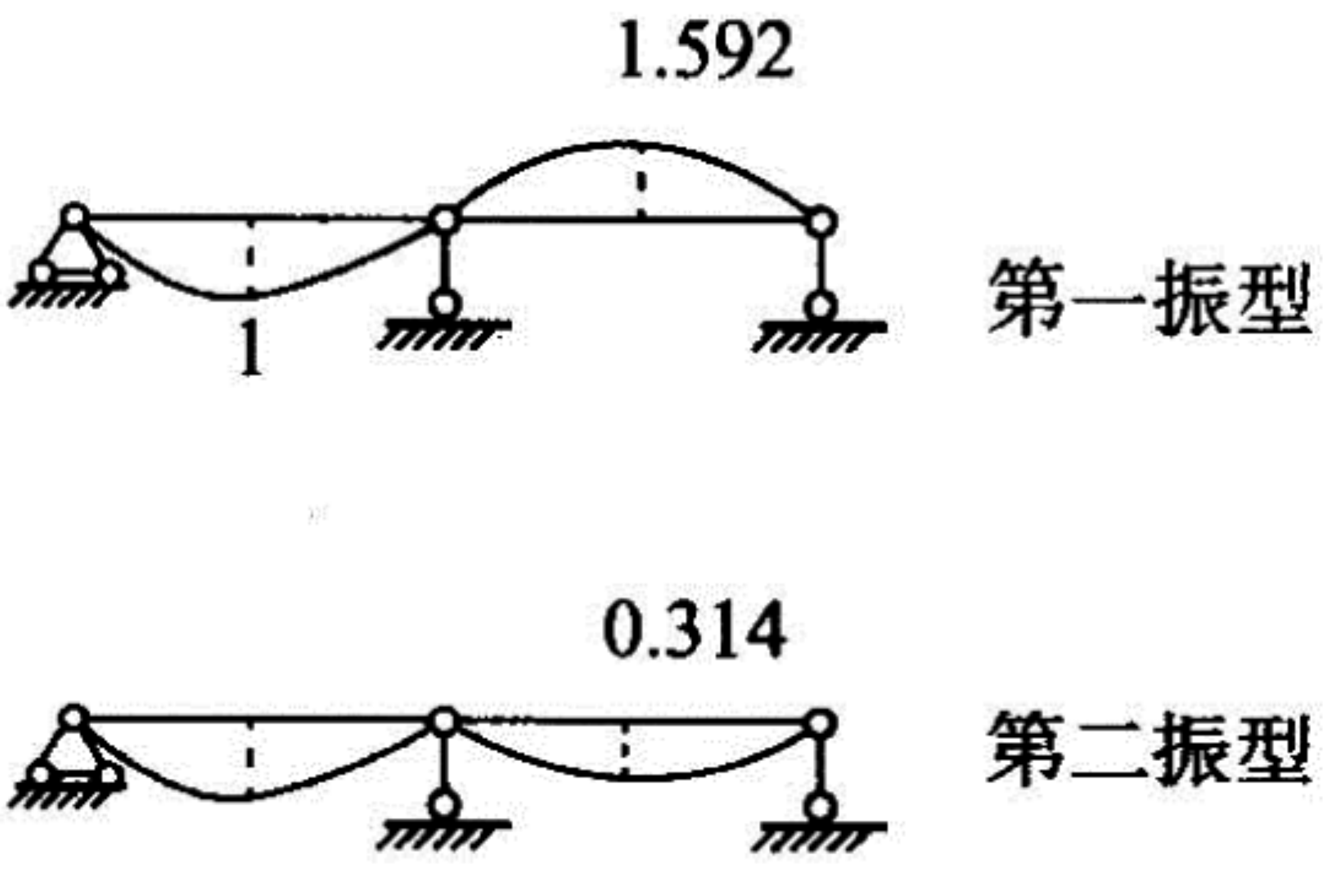


图 12-2-24

12-14　试求图示刚架的自振频率和主振型。

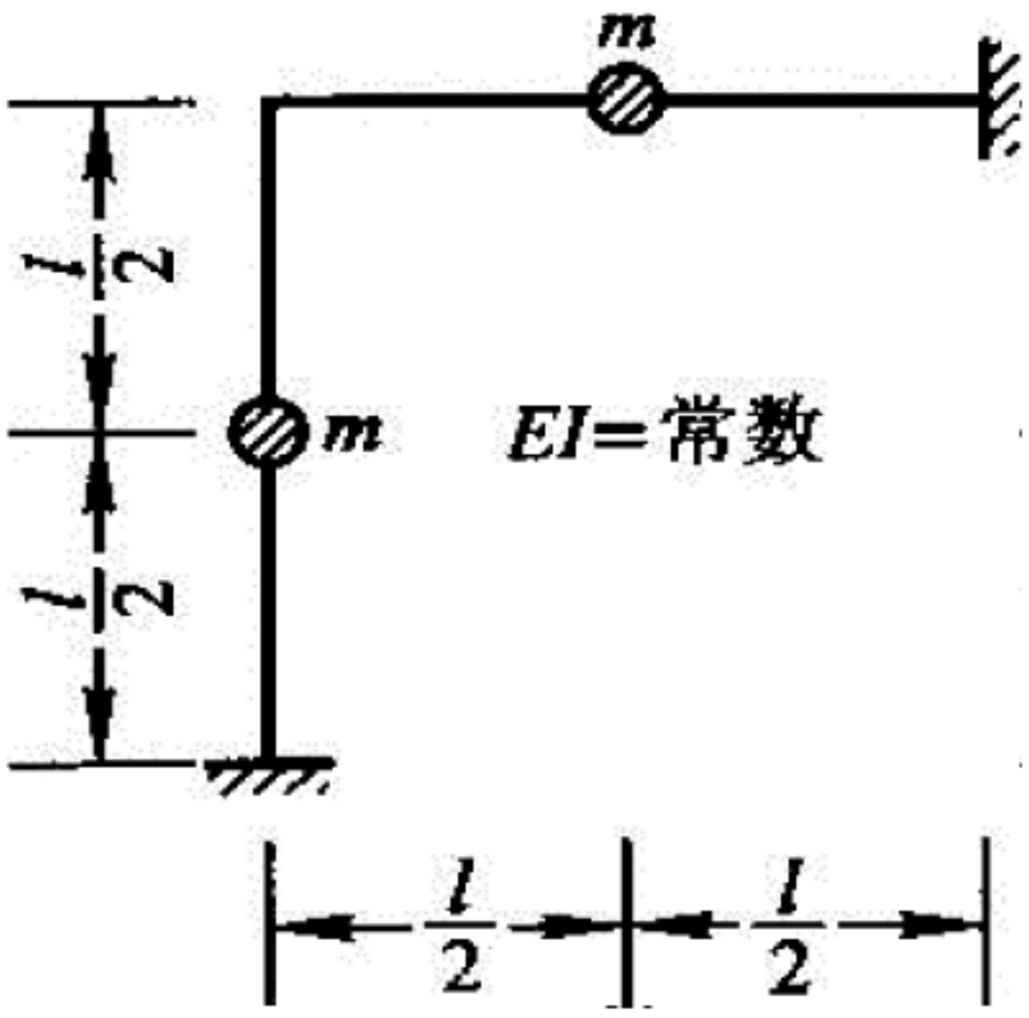


图 12-2-25（题 12-14）

解：此结构为超静定结构，首先绘制出 $\overline{M}_1$ 图、$\overline{M}_1^0$ 图以及 $\overline{M}_2^0$ 图，如图 12-2-26 所示。

计算柔度系数

$$\delta_{11}=\delta_{22}=\frac{11l^3}{1536EI}$$

$$\delta_{12}=-\frac{3}{1536}\frac{l^3}{EI}$$

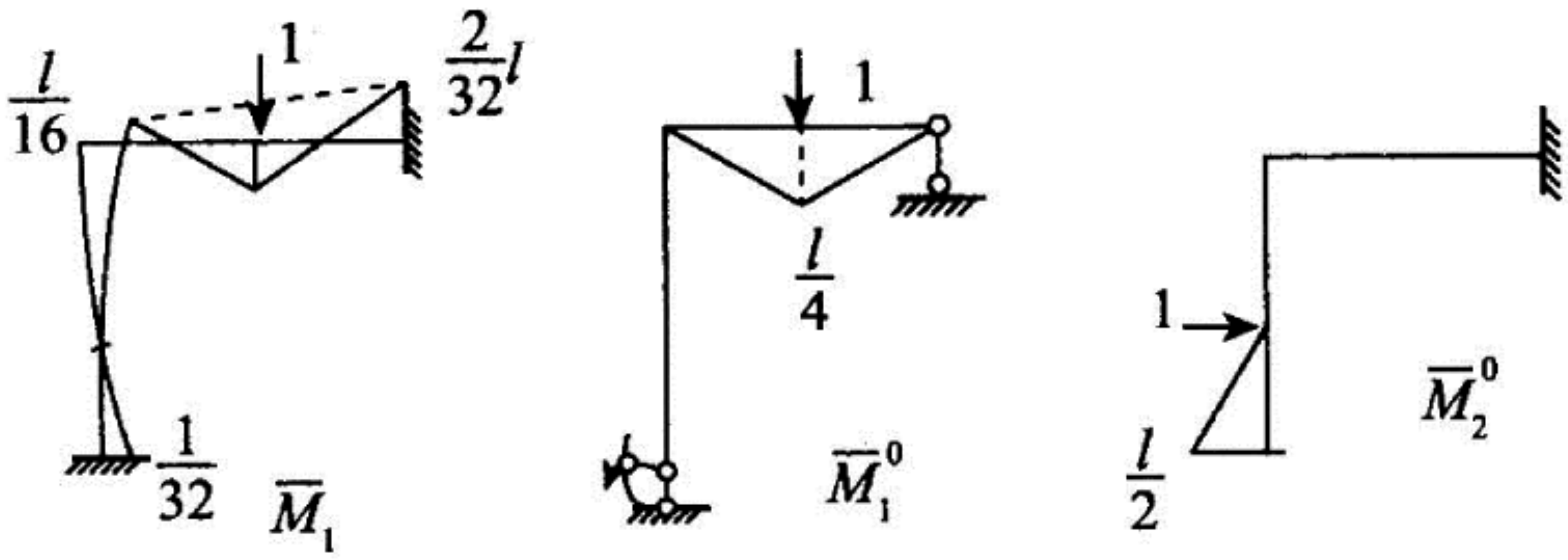


图 12-2-26

$$\lambda_1=(\delta_{11}-\delta_{12})m=\frac{14ml^3}{1536EI}, \quad \omega_1=10.47\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, \quad \rho_1=\frac{(\delta_{11}-\delta_{12})m-\delta_{11}m}{\delta_{12}m}=-1;$$

$$\lambda_2=(\delta_{11}+\delta_{12})m=\frac{8ml^3}{1536EI}, \quad \omega_2=13.86\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, \quad \rho_2=\frac{(\delta_{11}+\delta_{12})m-\delta_{11}m}{\delta_{12}m}=1;$$

根据上述计算结果绘制出主振型的示意图 12-2-27 所示。

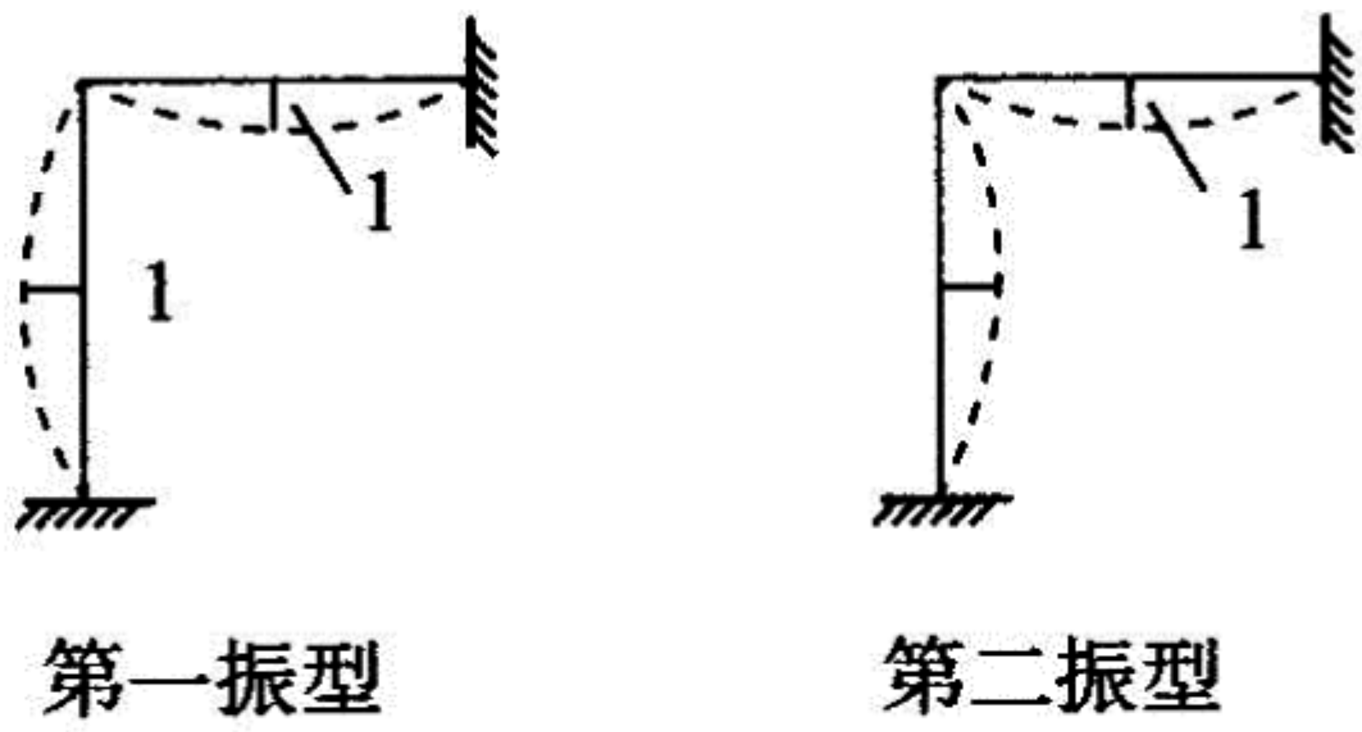


图 12-2-27

12-15 试求图示刚架的自振频率和主振型。

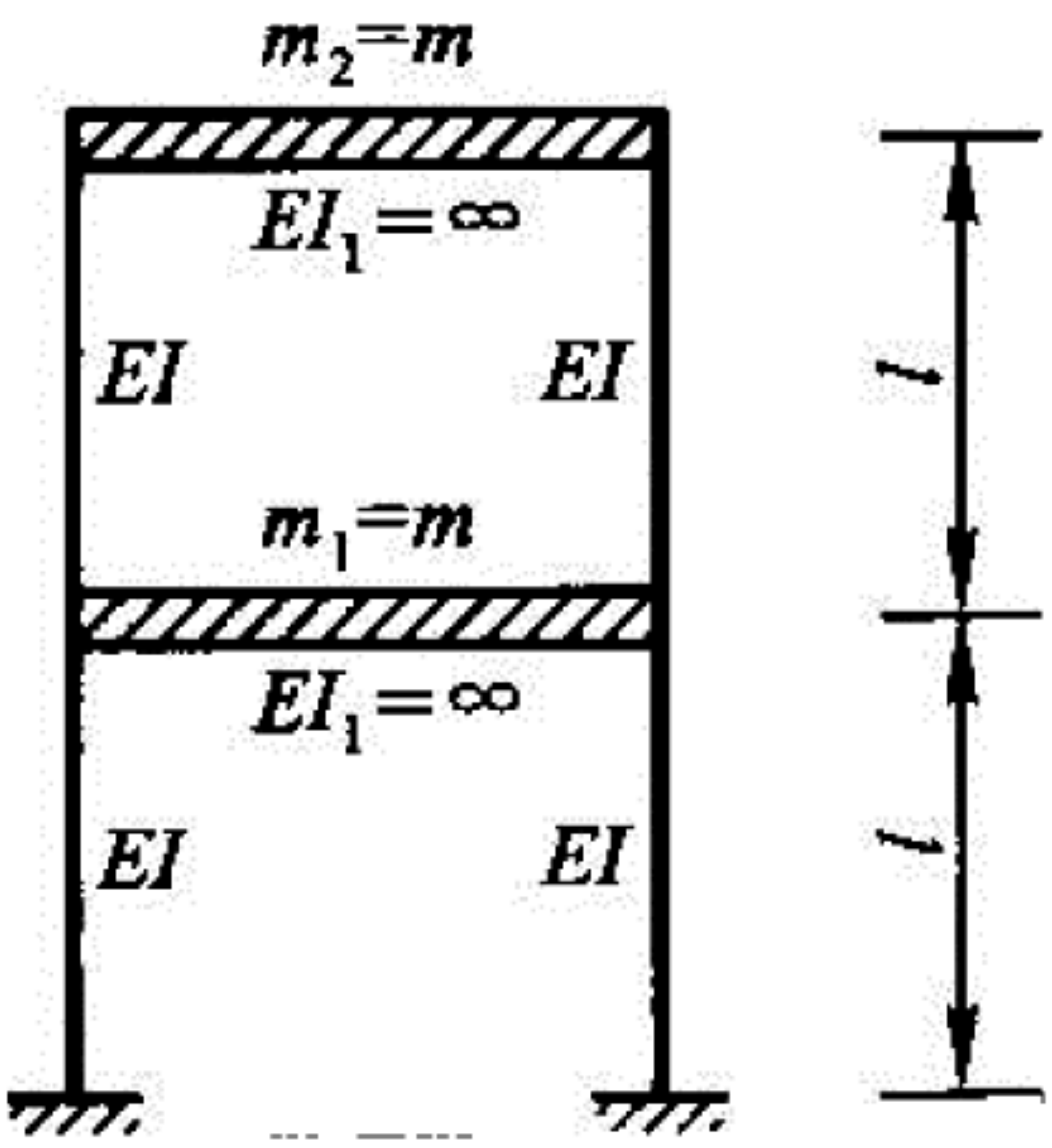


图 12-2-28（题 12-15）

解：由力法的结论易知

$$k_{11}=\frac{48EI}{l^3}, k_{22}=\frac{24EI}{l^3}, k_{12}=k_{21}=-\frac{24EI}{l^2}$$

计算频率和主振型过程如下

$$\omega_{1,2}^2=\frac{24EI}{ml^3}\left(1.5\pm\sqrt{\frac{5}{4}}\right)=\frac{24EI}{ml^3}\begin{Bmatrix}0.382\\2.618\end{Bmatrix}$$

$$\omega_{1,2}=\begin{Bmatrix}3.028\\7.927\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

$$\rho_1=\frac{0.382-2}{-1}=1.618, \quad \rho_2=\frac{2.618-1}{-1}=-0.618$$

根据上述计算结果，绘制出主振型示意图 12-2-29 所示。

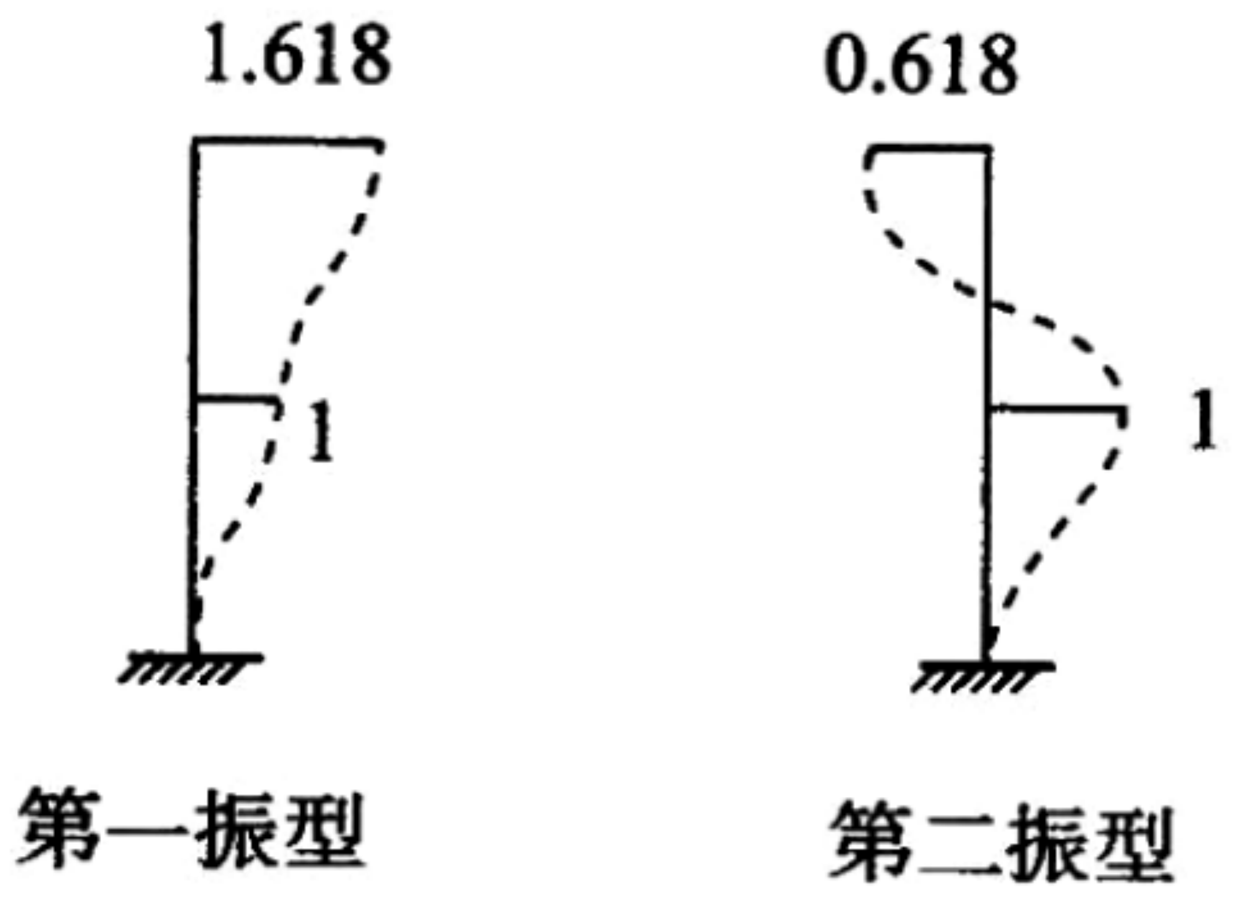


图 12-2-29

12-16　图 12-2-30 所示悬臂梁上装有两个发电机，重各为 G＝30kN，振动力最大值为 F＝5kN。试求当发电机 D 不开动而发电机 C 在每分钟转动次数为（a）300 次；（b）500 次时梁的动力弯矩图。已知梁的 E＝210GPa，I＝2.4×$10^{-4}$$m^4$。梁重可略去。

m_1　　　　　　m_2

图 12-2-30（题 12-16）

解：首先画出 $\overline{M}_1$ 图、$\overline{M}_2$ 图和 M_P 图，如图 12-2-31 所示。

由图乘法，求得柔度系数

$$\delta_{11}=\frac{9}{EI},\delta_{22}=\frac{1}{3EI},\delta_{12}=\frac{4}{3EI}$$

$$\Delta_{1p}=\frac{9F}{EI},\ \Delta_{2p}=\frac{4F}{3EI}$$

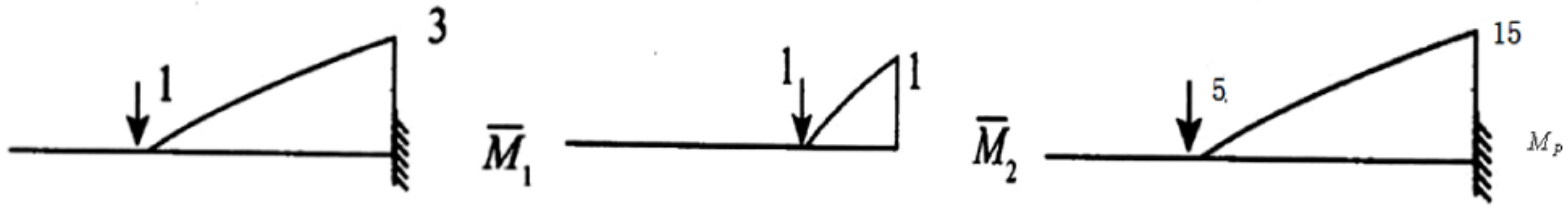


图 12-2-31

设 I_1^0 和 I_2^0 分别代表 m_1 和 m_2 的最大惯性力，根据运动方程可导出下面惯性力公式

$$\left(\delta_{11}-\frac{1}{m_1\theta^2}\right)I_1^0+\delta_{12}I_2^0+\Delta_{1P}=0$$

$$\delta_{21}I_1^0+\left(\delta_{22}-\frac{1}{m_2\theta^2}\right)I_2^0+\Delta_{2P}=0$$

（1）当 n＝300 次／分，θ＝10π 时，$m_1 = m_2 = \frac{30}{9.81} = 3.058kg$，代入惯性力公式并乘以 EI 有

$$\begin{cases} -7.6985 I_1^0 + 1.3333 I_2^0 + 45 = 0 \\ 1.3333 I_1^0 - 16.3652 I_2^0 + 6.6667 = 0 \end{cases}$$

算得最大惯性力为

$$I_1^0 = 6.00kN, I_2^0 = 0.9kN$$

应用叠加法得最大动弯矩为

$$M = I_1^0 \bar{M}_1 + I_2^0 \bar{M}_2 + M_P = 6.0 \times 3 + 0.9 \times 1 + 15 = 33.9kN \cdot m$$

画出动力弯矩图 12-2-32 所示。

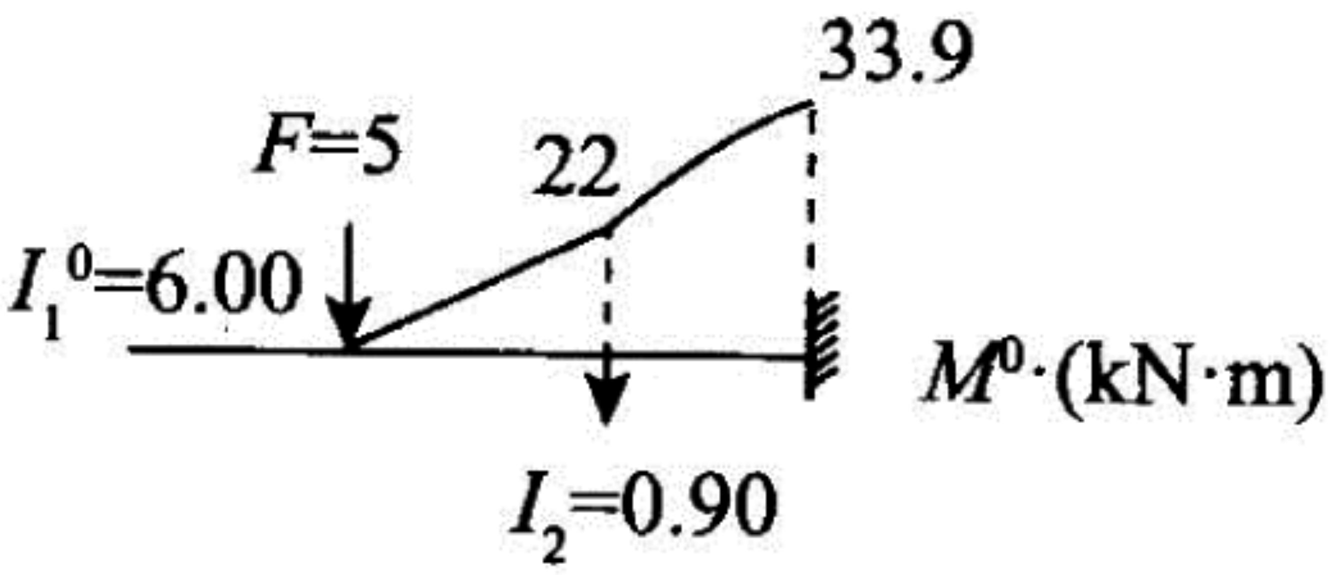


图 12-2-32

（2）当 n＝500 次／分，$\theta = \frac{50}{3}\pi = 16.667\pi$，同理 $m_1 = m_2 = \frac{30}{9.81} = 3.058kg$，代入惯性力公式并乘以 EI 有

$$\begin{cases} 2.98853 I_1^0 + 1.3333 I_2^0 + 45 = 0 \\ 1.3333 I_1^0 - 5.67814 I_2^0 + 6.6667 = 0 \end{cases}$$

算得最大惯性力为

$$I_1^0 = -14.10kN, I_2^0 = -2.14kN$$

应用叠加法得最大动弯矩为

$$M = I_1^0 \bar{M}_1 + I_2^0 \bar{M}_2 + M_P = (-14.1) \times 3 + (-2.14) \times 1 + 15 = -29.44kN \cdot m$$

画出动力弯矩图 12-2-33 所示。

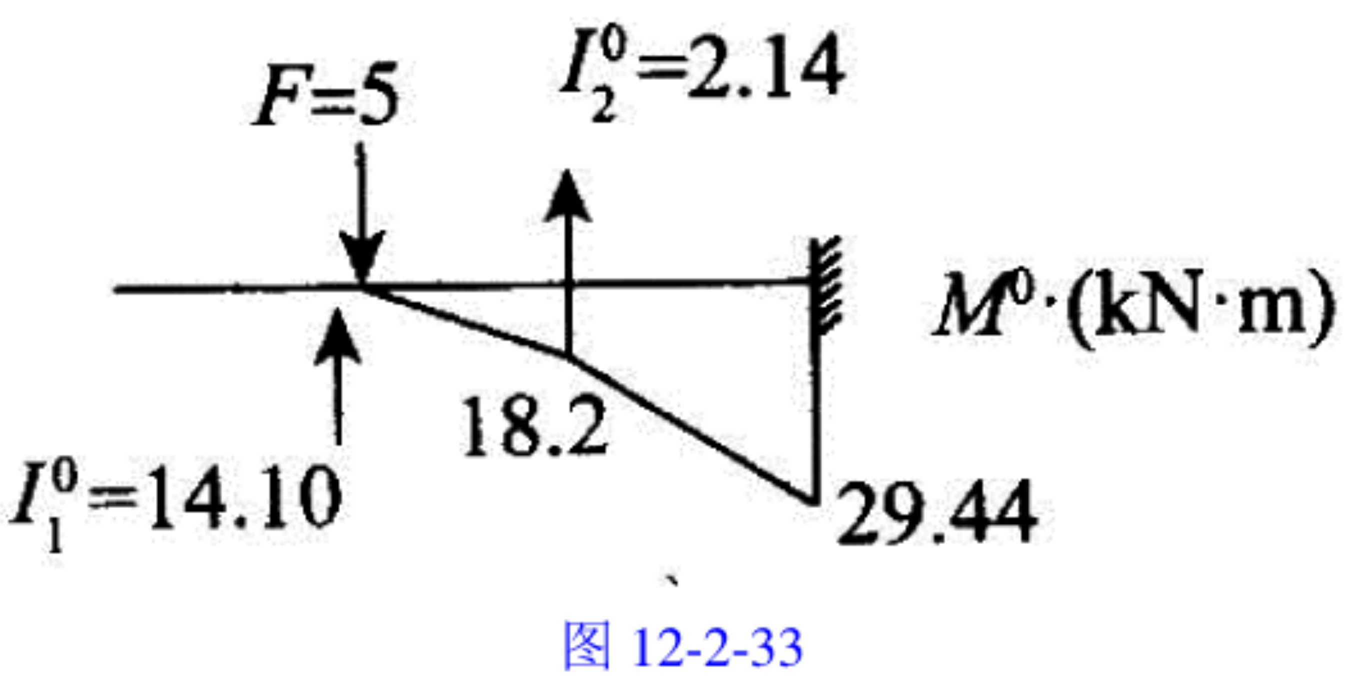


图 12-2-33

12-17　图示梁的 E＝210GPa，I＝$1.6 \times 10^{-4} m^4$，重量 mg＝20kN，设振动荷载最大值 F＝4.8kN．角频率 θ＝$30 s^{-1}$。试求两质量处的最大竖向位移。梁重可以略去。

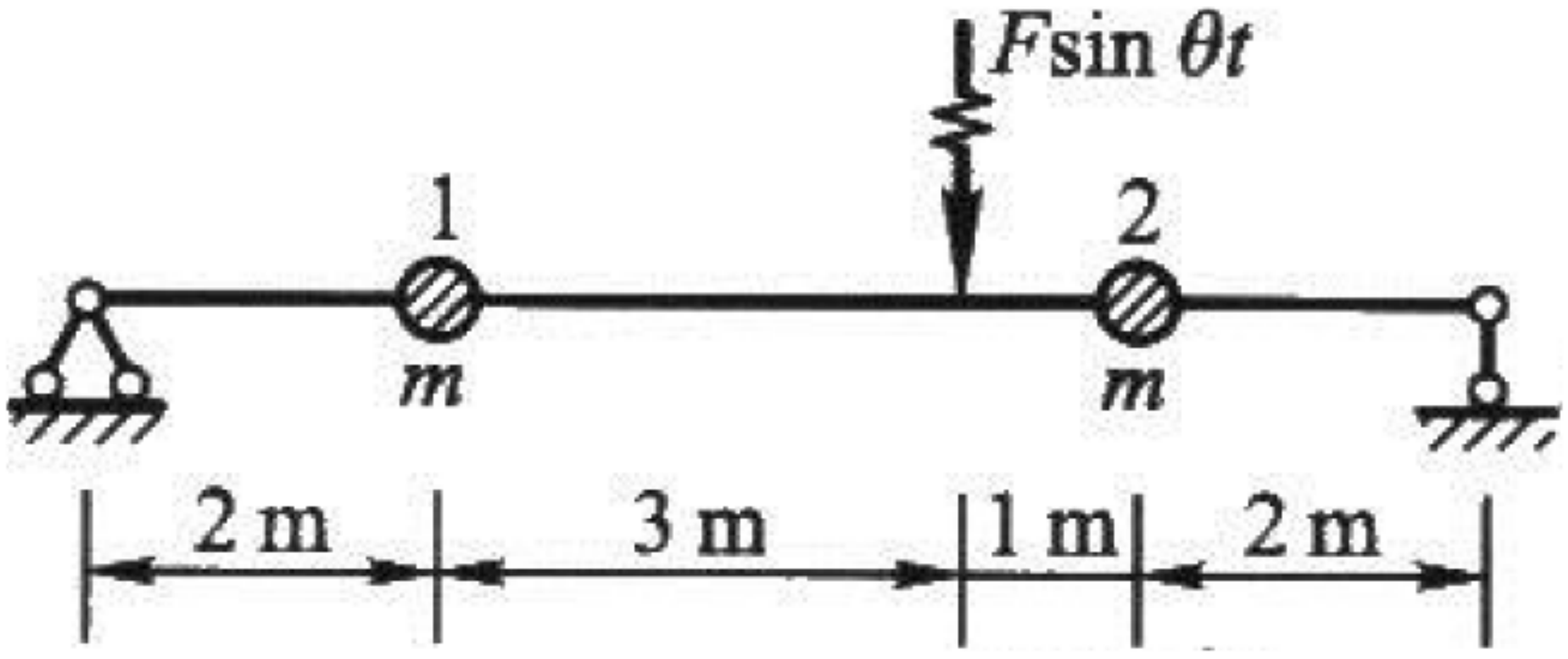


图 12-2-34（题 12-17）

解：首先画出 $\overline{M}_1$ 图、$\overline{M}_2$ 图和 M_P 图，如图 12-2-35 所示。

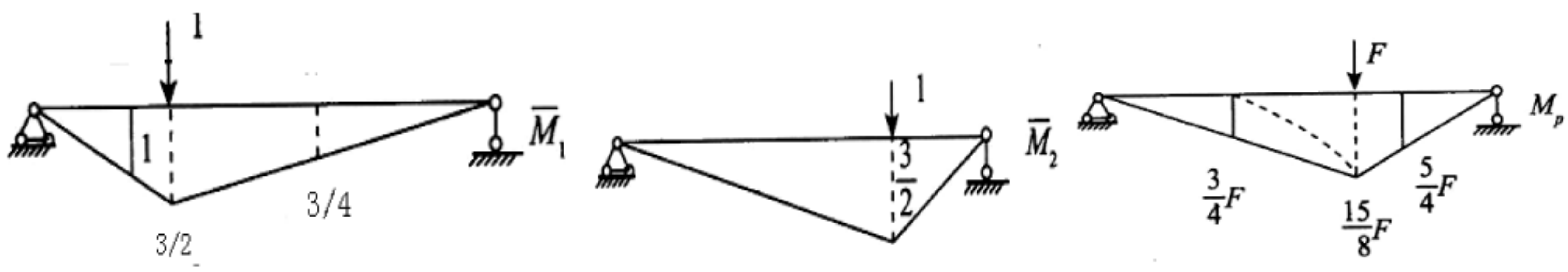


图 12-2-35

由图乘法，求得柔度系数

$$\delta_{11}=\delta_{22}=\frac{6}{EI}$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{14}{3EI}$$

$$\Delta_{1p}=\frac{51F}{8EI},\Delta_{2p}=\frac{175F}{24EI}$$

根据运动方程可导出下面的振幅公式

$$\left(\delta_{11}\mathrm{m}_1-\frac{1}{\theta^2}\right)y_1^0+\delta_{12}\mathrm{m}_2y_2^0+\frac{\Delta_{1P}}{\theta^2}=0$$

$$\delta_{21}\mathrm{m}_1y_1^0+\left(\delta_{22}\mathrm{m}_2-\frac{1}{\theta^2}\right)y_2^0+\frac{\Delta_{2P}}{\theta^2}=0$$

将 $\theta=30s^{-1}$ 代入公式并乘以 EI 有

$$\begin{cases}-25.1009y_1^0+9.5141y_2^0+0.034=0\\9.5141y_1^0-25.1009y_2^0+0.038889=0\end{cases}$$

计算得到最大竖向位移

$$y_1^0=2.268\times10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$y_2^0=2.409\times10^{-3}\,\mathrm{m}$$

12-18　试求图示刚架的最大动力弯矩图。设 $\theta=\sqrt{\frac{48EI}{ml^3}}$ 刚架自重已集中于两质点处。

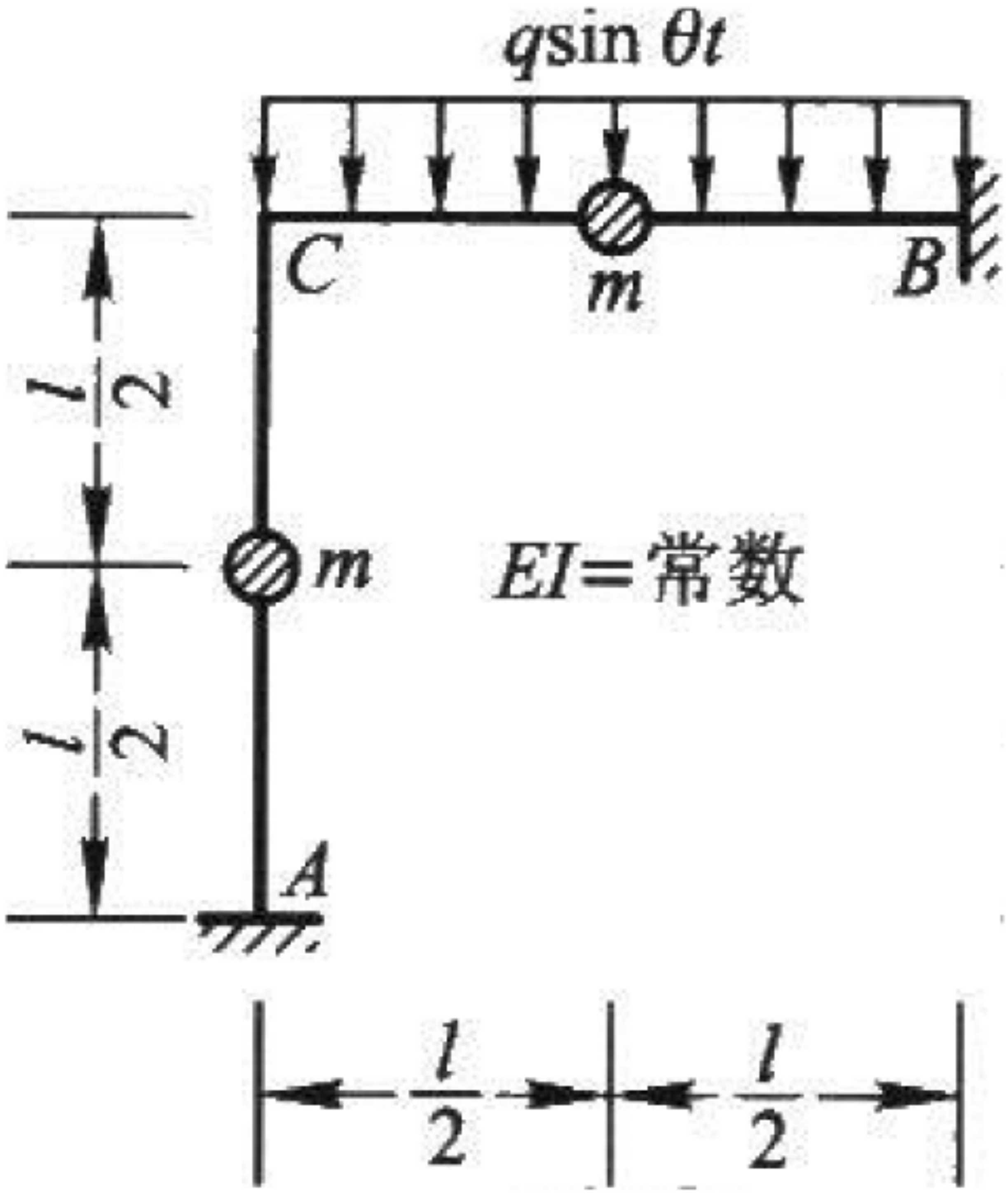


图 12-2-36（题 12-18）

解：此结构为超静定结构，首先画出$\overline{M}_1$图、$\overline{M}_2$图和M_P图，再作出$\overline{M}_1^0$图、$\overline{M}_2^0$图，如图 12-2-37 所示。

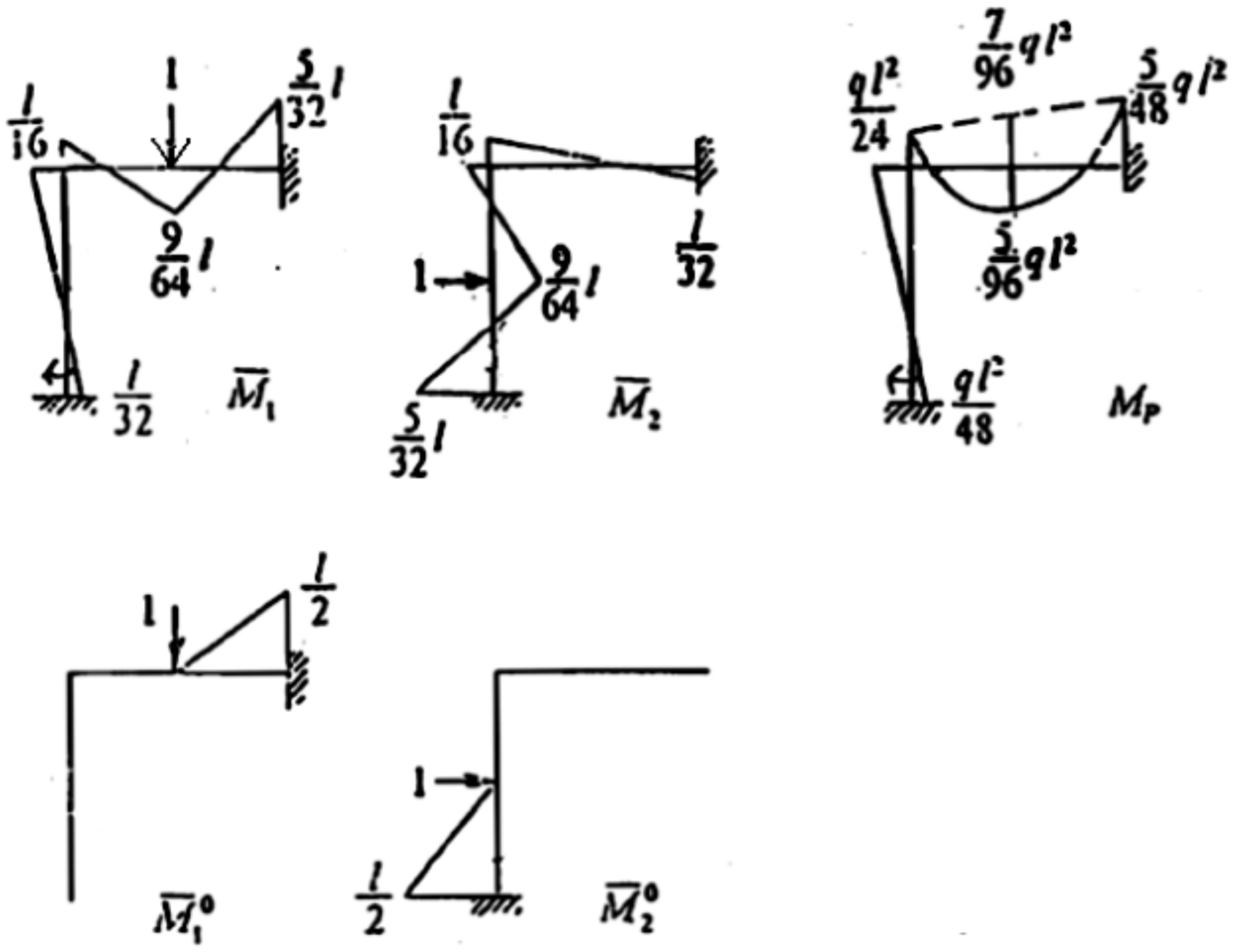


图 12-2-37

由图乘法，求得柔度系数为

$$\delta_{11}=\delta_{12}=\frac{11}{1536}\ \frac{l^3}{EI}$$

$$\delta_{21}=\delta_{12}=\frac{-3l^3}{1536EI}$$

$$\Delta_{1p}=\frac{1}{256}\ \frac{ql^4}{EI},\Delta_{2p}=-\frac{ql^4}{768EI}$$

设I_1^0和I_2^0分别代表 m_1 和 m_2 的最大惯性力，根据运动方程可导出下面惯性力公式

$$\left(\delta_{11}-\frac{1}{m_1\theta^2}\right)I_1^0+\delta_{12}I_2^0+\Delta_{1P}=0$$

$$\delta_{21}I_1^0+\left(\delta_{22}-\frac{1}{m_2\theta^2}\right)I_2^0+\Delta_{2P}=0$$

将求出的柔度系数代入公式并约去$\dfrac{l^3}{EI}$后有

$$\begin{cases}\left(\dfrac{11}{1536}-\dfrac{1}{48}\right)I_1^0-\dfrac{3}{1536}I_2^0+\dfrac{ql}{256}=0\\ -\dfrac{3}{1536}I_1^0+\left(\dfrac{11}{1535}-\dfrac{1}{48}\right)I_2^0-\dfrac{ql}{768}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-21I_1^0-3I_2^0+6ql=0\\ -3I_1^0-21I_2^0-21ql=0\end{cases}$$

解得

$$I_1^0=\frac{11}{36}ql,I_2^0=-\frac{5}{36}ql$$

动力弯矩图可按迭加法 $M^0=I_1^0\overline{M}_1+I_2^0\overline{M}_2+M_p$，绘出如图 12-2-38 所示。

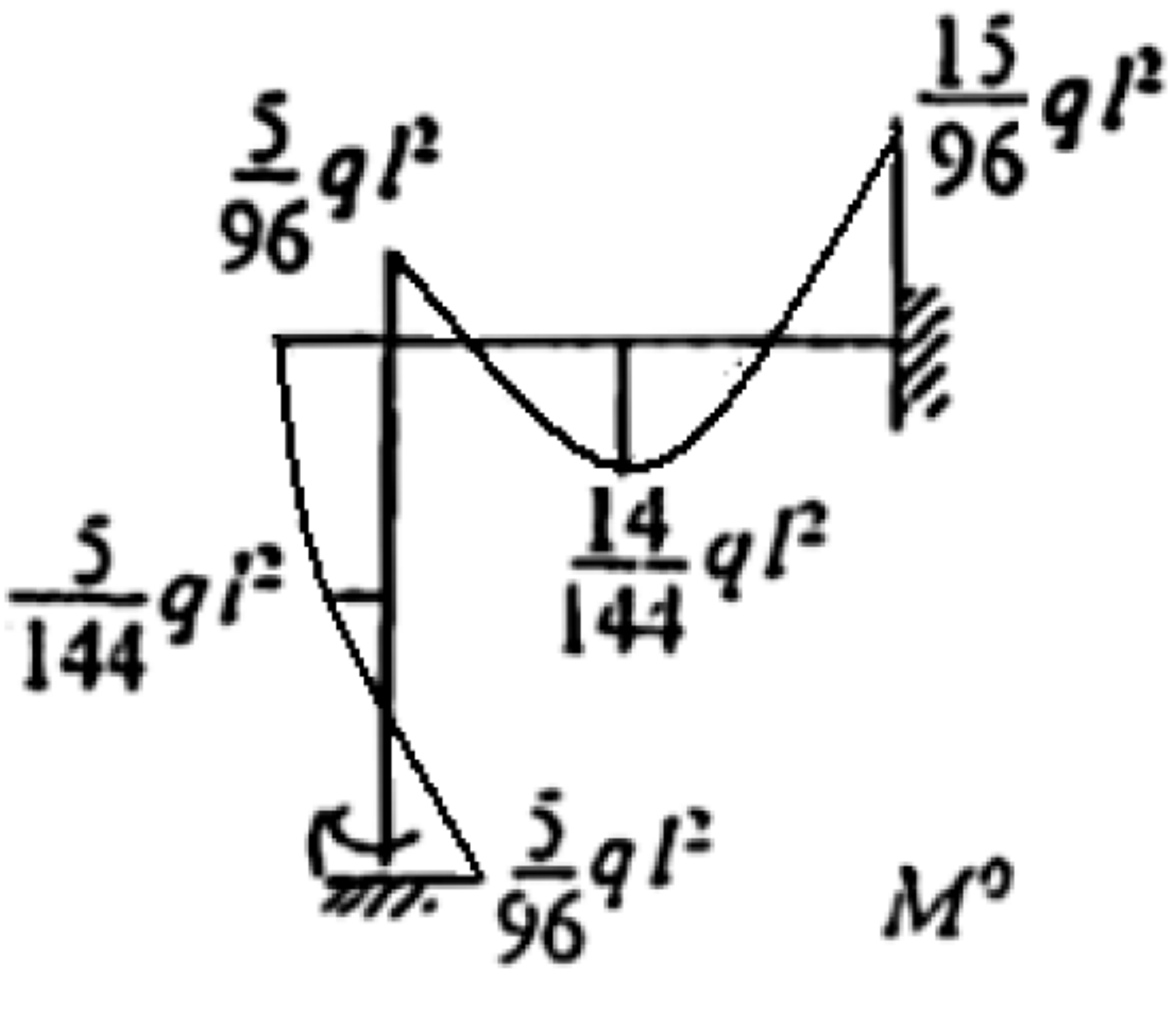


图 12-2-38

12-19　图示刚架各横梁刚度为无穷大，试求各横梁处的位移幅值和柱端弯矩幅值。已知 m＝100t，EI＝5×10^5kN·m^2，l＝5m；简谐荷载幅值 F＝30kN，每分钟振动 240 次。

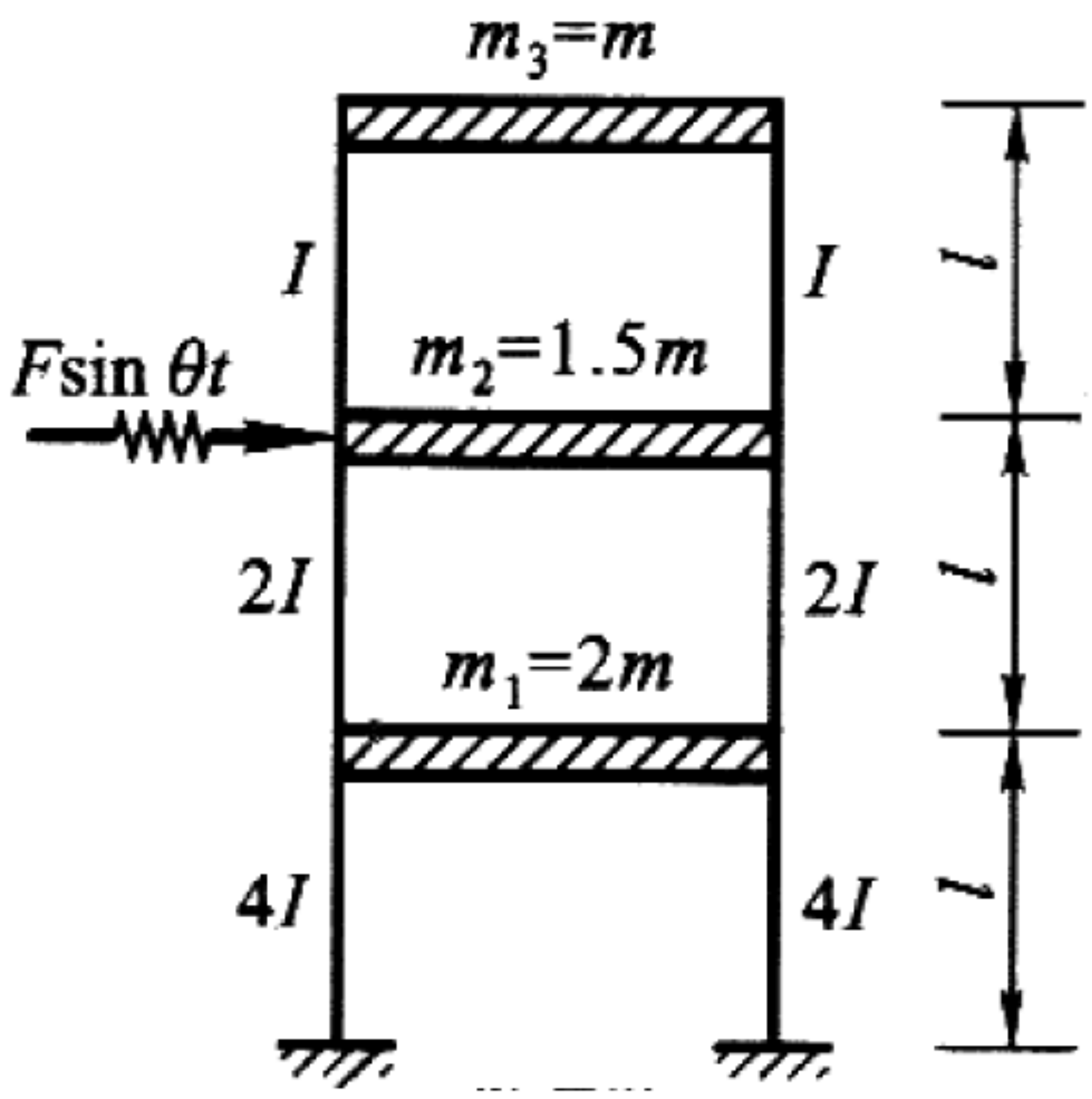


图 12-2-39（题 12-19）

解：用刚度法求解，依题意有

$$k=\frac{24EI}{l^3}\begin{bmatrix}6 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\frac{24EI}{l^3}=\frac{24\times5\times10^5}{5^3}=96\times10^3\,\text{kN/m}$$

$$\theta=\frac{2\pi\times240}{60}=8\pi,\theta^2=64\pi^2$$

$$M=100\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1.5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\text{（单位 t，即 }10^3\text{kg）}$$

代入公式 $(K-\theta^2M)Y^0=P$ 有

$$10^3\begin{bmatrix}449.669 & -192 & 0\\ -192 & 193.252 & -96\\ 0 & -96 & 32.835\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1^0\\ y_2^0\\ y_3^0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 30\\ 0\end{Bmatrix}$$

解得

$$y_1^0=-0.0756\times10^{-3}\,\text{m}$$
$$y_2^0=-0.1771\times10^{-3}\,\text{m}$$
$$y_3^0=-0.5178\times10^{-3}\,\text{m}$$

惯性力幅值为

$$I_1^0=200\times64\pi^2(-0.0756\times10^{-3})$$
$$=-9.55\text{kN}$$
$$I_2^0=150\times64\pi^2(-0.1771\times10^{-3})$$
$$=-16.78\text{kN}$$
$$I_3^0=100\times64\pi^2(-0.5178\times10^{-3})$$
$$=-32.71\text{kN}$$

本题横梁刚度为无穷大，每层只有两根柱且截面及高度相等，因此每根柱的柱端弯矩可表述为$M_1=\frac{Q_1 h}{4}$，Q_1为该层的总剪力，等于该层以上水平外力（包括惯性力）的代数和；h 为该层柱高。横梁的杆端弯矩可由刚结点力矩平衡求得。

画出一根柱的动力弯矩图 M^0，如图 12-2-40 所示。

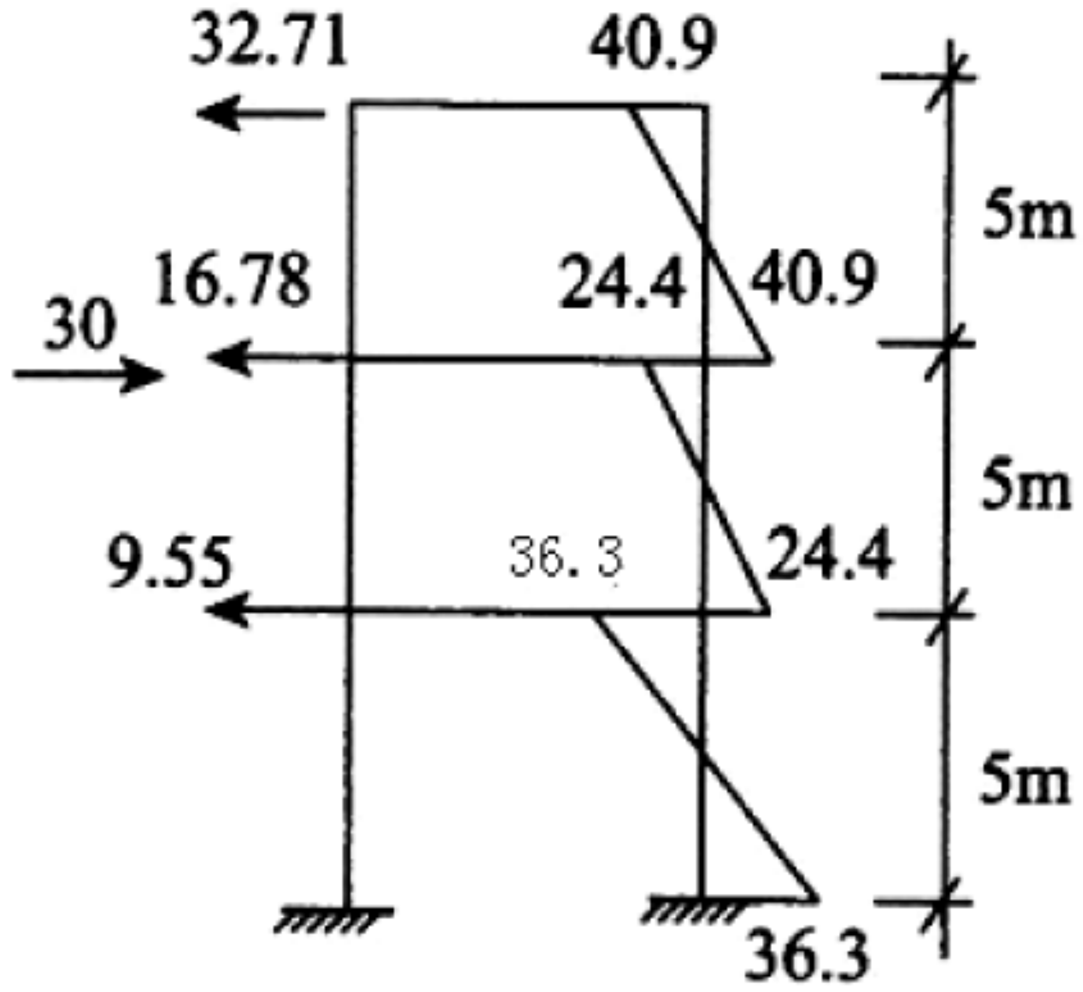


图 12-2-40

12-20　用振型分解法重作题 12-16。

解：由 12-16 知柔度系数 $\delta_{11}=\frac{9}{EI},\delta_{22}=\frac{1}{3EI},\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{4}{3EI}$ ，则

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{28}{3}\pm\sqrt{\frac{740}{3}}\right)\frac{m}{EI}=\begin{Bmatrix}9.2005\\0.132843\end{Bmatrix}\frac{m}{EI}$$

$$\omega_{1,2}=\begin{Bmatrix}0.32968\\2.743266\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{EI}{m}}=\begin{Bmatrix}42.32\\352.22\end{Bmatrix}s^{-1}$$

$$\rho_1=\frac{9.2005-9}{4/3}=0.1504$$

$$\rho_2=\frac{0.13284-9}{4/3}\doteq-6.650$$

即

$$A=[A^{(1)}\ A^{(2)}]=\begin{bmatrix}1 & 1\\0.1504 & -6.650\end{bmatrix}$$

如图 12-2-41 所示

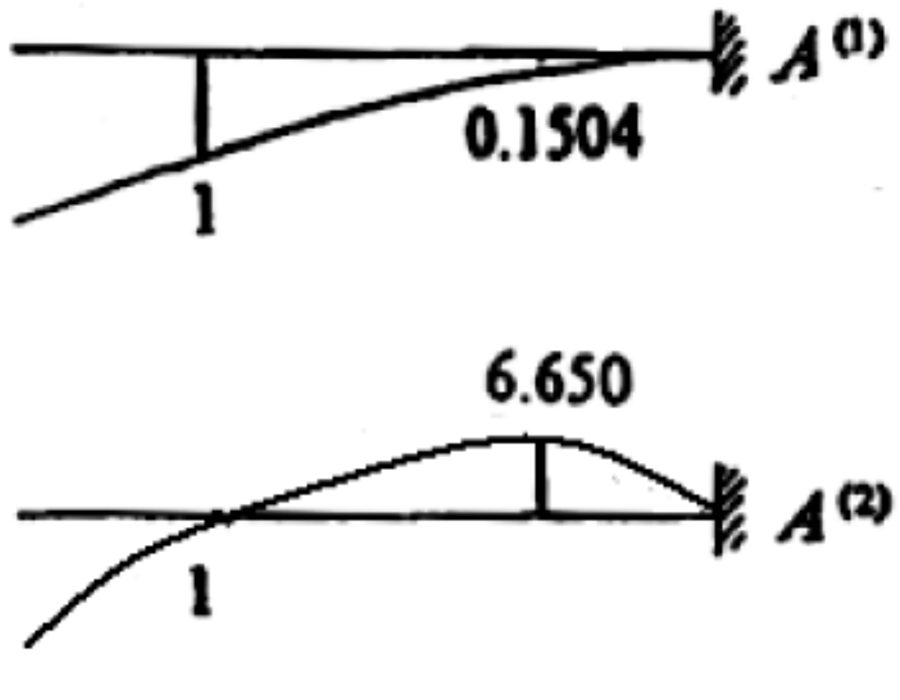


图 12-2-41

可进一步算得广义质量和广义荷载如下

$$\overline{M}_1=[1,0.1504]\begin{bmatrix}m & 0\\0 & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\0.1504\end{Bmatrix}=1.0226m$$

$$\overline{F}_1=[1,0.1504]\begin{Bmatrix}F\sin\theta t\\0\end{Bmatrix}=F\sin\theta t$$

$$\overline{M}_2=[1,-6.650]\begin{bmatrix}m & 0\\0 & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\-6.650\end{Bmatrix}=45.22m$$

$$\overline{F}_2=[1,-6.650]\{F\sin\theta t\}=F\sin\theta t$$

（1）当 n＝300 次／分，θ＝10π，因是简谐荷载，不计阻尼，则

$$\alpha_1=\frac{\overline{F}_1^{\theta}}{\overline{M}_1(\omega_1^2-\theta^2)}\sin\theta t=\frac{F}{1.0226m(42.32^2-100\pi^2)}\sin\theta t=1.989\times10^{-3}\sin\theta t$$

$$\alpha_2=\frac{\overline{F}_2^{\theta}}{\overline{M}_2(\omega_2^2-\theta^2)}\sin\theta t=\frac{F}{45.22m(352.22^2-100\pi^2)}\sin\theta t=0.294\times10^{-6}\sin\theta t$$

$$y_1=\alpha_1+\alpha_2=1.989\times10^{-3}\sin\theta t$$

$$y_2=0.1504\alpha_1-6.650\alpha_2=0.297\times10^{-3}\sin\theta t$$

惯性力幅值为

$$I_1^0=m_1\theta^2y_1^0=\frac{30}{9.81}\times100\pi^2\times1.989\times10^{-3}=6.00\text{kN}$$

$$I_2^0=m_2\theta^2y_2^2=\frac{30}{9.81}\times100\pi^2\times0.297\times10^{-3}=0.9\text{kN}$$

M^0 图同题 12-16。

（2）n＝500 次／分，$\theta=\frac{50}{3}\pi,\theta^2=277.78\pi^2$，同（1）中的步骤可得

$$\alpha_1=-1.682\times10^{-3}\sin\theta t，\quad \alpha_2=0.298\times10^{-4}\sin\theta t$$

$$y_1=-1.628\times10^{-3}\sin\theta t，\quad y_2=-0.255\times10^{-3}\sin\theta t$$

$$I_1^0=-14.10kN，\quad I_2^0=-2.14kN$$

M^0 图同题 12-16。

12-21　用振型分解法重作题 12-19，荷载为突加荷载，大小与位置不变；考虑阻尼并已知 ξ_1 与 ξ_2 均为 0.05。

解：由题 12-19 已经得到

$$\omega_1=19.40s^{-1},A^{(1)}=[1,2.608,4.290]^T$$

$$\omega_2=41.27s^{-1},A^{(2)}=[1,1.226,-1.584]^T$$

$$\omega_3=60.67s^{-1},A^{(3)}=[1,-0.834,0.294]^T$$

$$M=m\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 15 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

有 $F=\begin{Bmatrix}0\\F\sin\theta t\\0\end{Bmatrix}$　$\theta=8\pi s^{-1}$，可得计算得到

$$\overline{M}_1 = A^{(1)T}MA^{(1)} = 30.607\text{m}, \overline{F}_1 = A^{(1)T}F = 2.608F\sin\theta t$$

$$\overline{M}_2 = A^{(2)T}MA^{(2)} = 6.7637\text{m}, \overline{F}_2 = A^{(2)T}F = 1.226F\sin\theta t$$

$$\overline{M}_3 = A^{(3)T}MA^{(3)} = 3.1298m, \overline{F}_3 = A^{(3)T}F = -0.834F\sin\theta t$$

参照题 12-20 可算出各正则坐标之幅值为

α_1^0

α_2^0

α_3^0

各质点位移振幅为

$$y_1^0 = [-0.10013 + 0.050747 + (-0.026217)]10^{-3}$$
$$= -0.0756 \times 10^{-3}\text{m}$$
$$y_2^0 = [2.608(0.10013) + 1.266 \times 0.050747 - 0.834(-0.026217)]10^{-3}$$
$$= -0.1771 \times 10^{-3}\text{m}$$
$$y_3^0 = [4.290(-0.10013) - 1.584 \times 0.050747 + 0.294(-0.026217)]10^{-3}$$
$$= -0.5176 \times 10^{-3}\text{m}$$

以下计算同题 12-19。

12-22　试求图示具有均布质量 m=q / g 的简支梁的自振频率和振型。

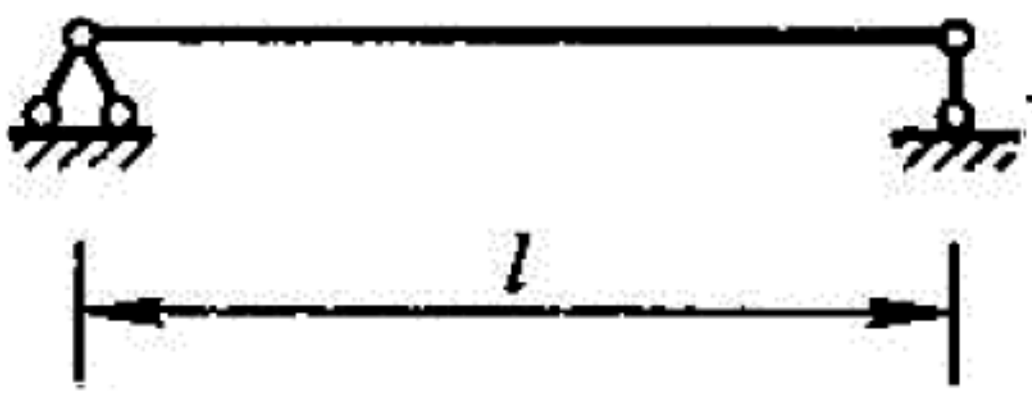


图 12-2-42（题 12-22）

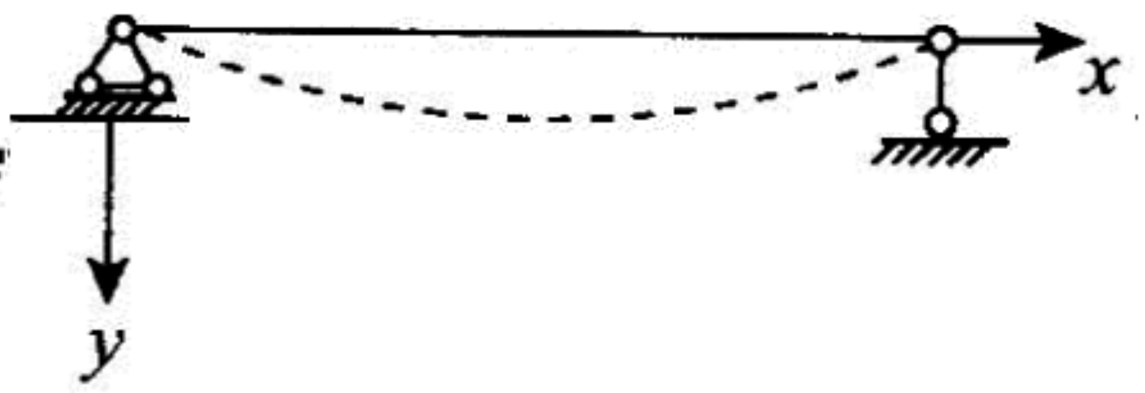


图 12-2-43

解：建立如图 12-2-43 所示的坐标系，有如下关系式

$$y_0 = 0, M_0 = 0$$

$$y_l=0\text{ 时，有 } EIy_0' \frac{1}{k} B_{kl} + F_{s0} \frac{1}{k^3} D_{kl} = 0$$

$$M_l=0\text{ 时，有 } EIy_0' k D_{kl} + F_{s0} \frac{1}{k} B_{kl} = 0$$

由 y_0' 和 F_{S0} 不全为零，应有

$$\begin{vmatrix} \frac{EI}{k} B_{kl} & \frac{1}{k^3} D_{kl} \\ EIkD_{kl} & \frac{1}{k} B_{kl} \end{vmatrix} = 0\text{，即 } B_{kl}^2 - D_{kl}^2 = 0$$

$$(B_{kl} + D_{kl})(B_{kl} - D_{kl}) = 0$$

$$shkl \cdot \sin kl = 0$$

而 shkl≠0，有 sinkl=0

即有

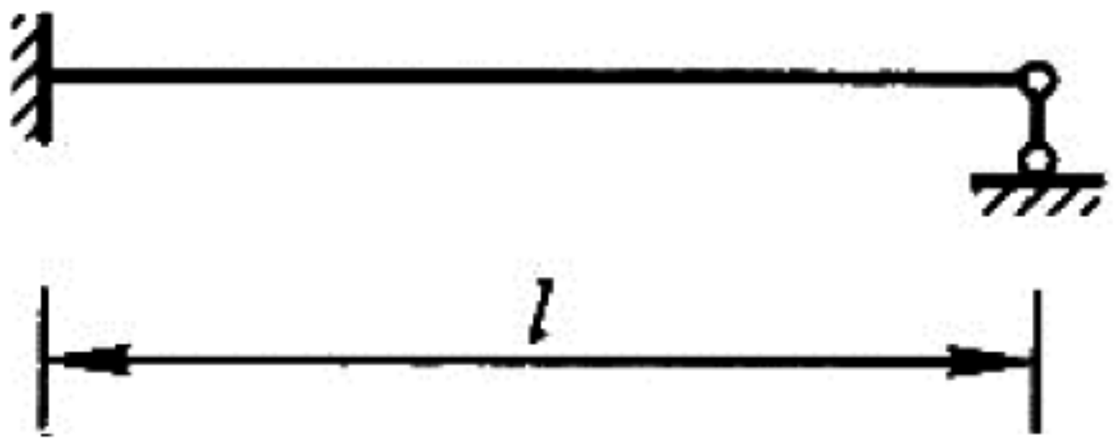
$$kl=i\pi(i=1,2,3\cdots)$$

可得频率和振型如下

$$\omega_i=\frac{i^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{q}}(i=1,2,3\cdots)$$

$$y^{(i)}=C\sin\frac{i\pi x}{l}(i=1,2,3\cdots)$$

12-23　图示梁具有均布质量 m＝q / g，试求其第一和第二自振频率。



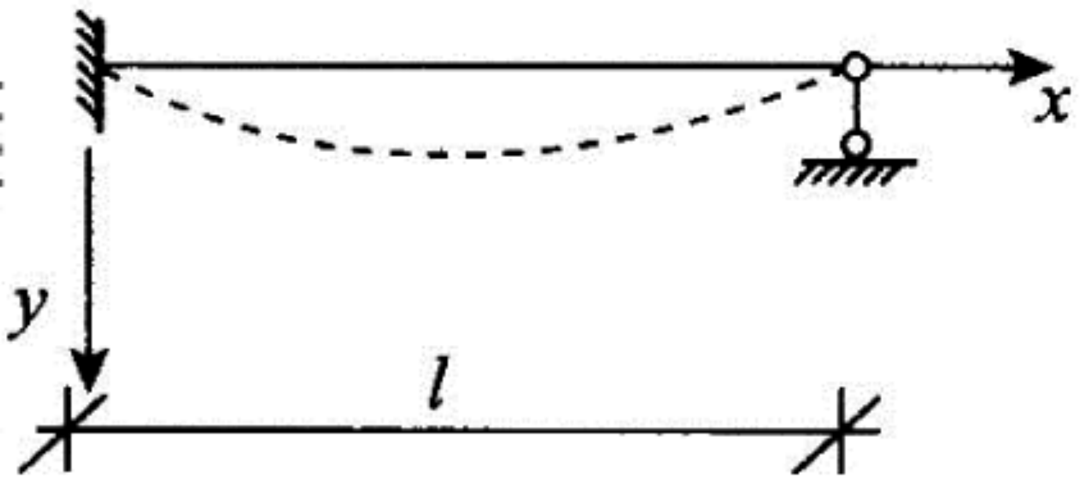


图 12-2-44（题 12-23）　　　　图 12-2-45

解：建立如图 12-2-45 所示的坐标系，有如下关系式

$$y_0=0, y'_0=0$$

$$y_l=0\text{ 时，有 } M_0\frac{1}{k^2}C_{kl}+F_{s0}\frac{1}{k^3}D_{kl}=0$$

$$M_l=0\text{ 时，有 } M_0A_{kl}+F_{s0}\frac{1}{k}B_{kl}=0$$

M_0、F_{S0} 不全为 0，则以上两式中它们的系数行列式等于 0，展开得

$$C_{kl}B_{kl}=A_{kl}D_{kl}$$

用试算法可解得非零最小正根（kl）$_1$＝3.927，次小正根（kl）$_2$＝7.069

由 $\omega=\frac{(kl)^2}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{q}}$ ，计算得到自振频率为

$$\omega_1=\frac{15.42}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{q}},\omega_2=\frac{49.97}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{q}}$$

12-24　试用能量法求题 12-23 所示梁的最低自振频率。设以梁在自重下的弹性曲线为其振动形式。

解：均布自重下的弯矩方程为

$$M_x=-\frac{ql^2}{8}+\frac{5ql}{8}x-\frac{q}{2}x^2$$

由图乘法求挠曲线方程，如图 12-2-46 所示，具体计算如下

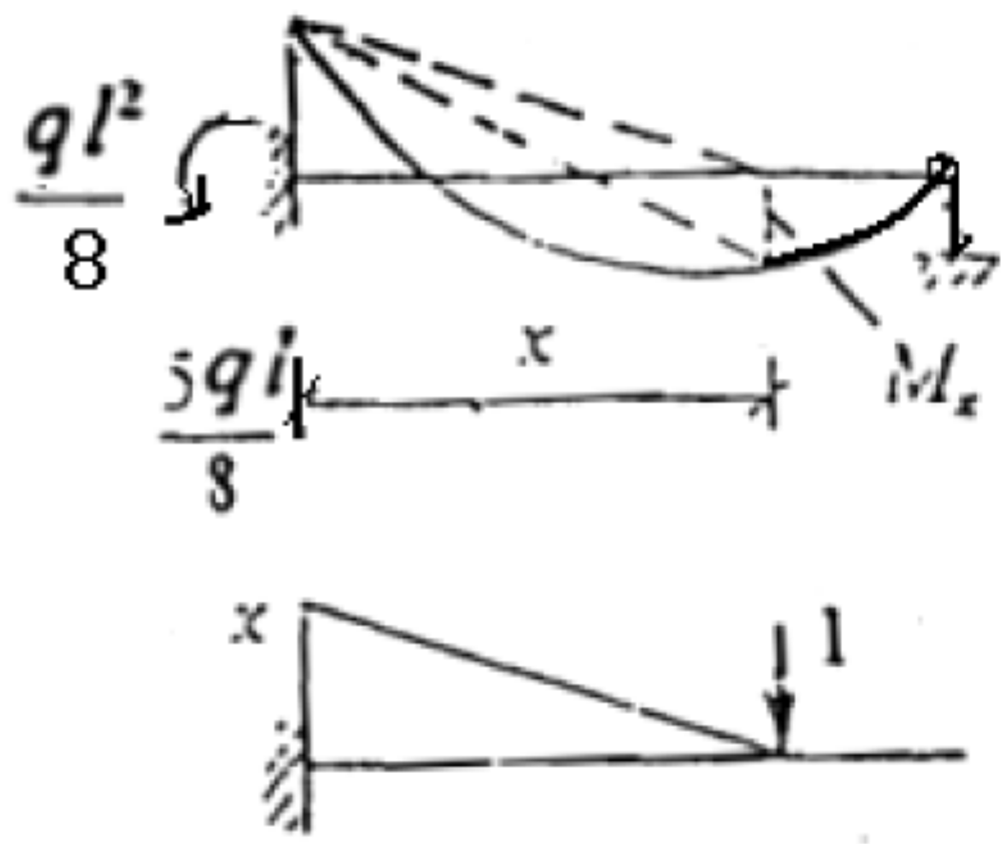


图 12-2-46

$$y=\frac{1}{EI}\left[\frac{ql^2}{8}\frac{x}{2}\frac{2x}{3}-\left(-\frac{ql^2}{8}+\frac{5qlx}{8}-\frac{qx^2}{2}\right)\frac{x}{2}\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\frac{qx^2}{8}x\frac{x}{2}\right]=\frac{q}{48EI}[3l^2x^2-5lx^3+2x^4]$$

$$\int_0^l qydx=\frac{q^2}{48EI}\int_0^l(3l^2x^2-5lx^3+2x^4)dx$$
$$=\frac{q^3l^5}{48EI}\left(\frac{3}{3}-\frac{5}{4}+\frac{2}{5}\right)=\frac{q^2l^5}{320EI}=3.125\times10^{-3}\frac{q^2l^5}{EI}$$

$$\int_0^l my^2dx=\frac{mq^2}{(48EI)^2}\int_0^l(3l^2x^2-51x^3+2x^4)^2dx$$
$$=\frac{mq^2}{(48EI)^2}\int_0^l(9l^4x^4-25l^2x^6+4x^8-30l^3x^5-20lx^3+12l^2x^6)dx$$
$$=\frac{mq^2l^9}{(48EI)^2}\left(\frac{9}{5}+\frac{25}{7}+\frac{4}{9}-\frac{30}{6}-\frac{20}{8}+\frac{12}{7}\right)=\frac{mq^2l^9}{(48EI)^2}\frac{19}{630}$$
$$=1.309\times10^{-5}\frac{mq^2l^9}{(EI)^2}$$

由上述数据可算得梁的最低频率如下

$$\omega^2=\frac{\int_0^l gydx}{\int_0^l my^2dx}=238.7\frac{EI}{ml^4},\omega=\frac{15.45}{l^2}\sqrt{\frac{EIg}{q}}$$

12-25　试用相当梁法求图示桁架的第一自振频率。已知各杆截面面积均为 $A=2\times10^{-3}m^2$，E＝210GPa。

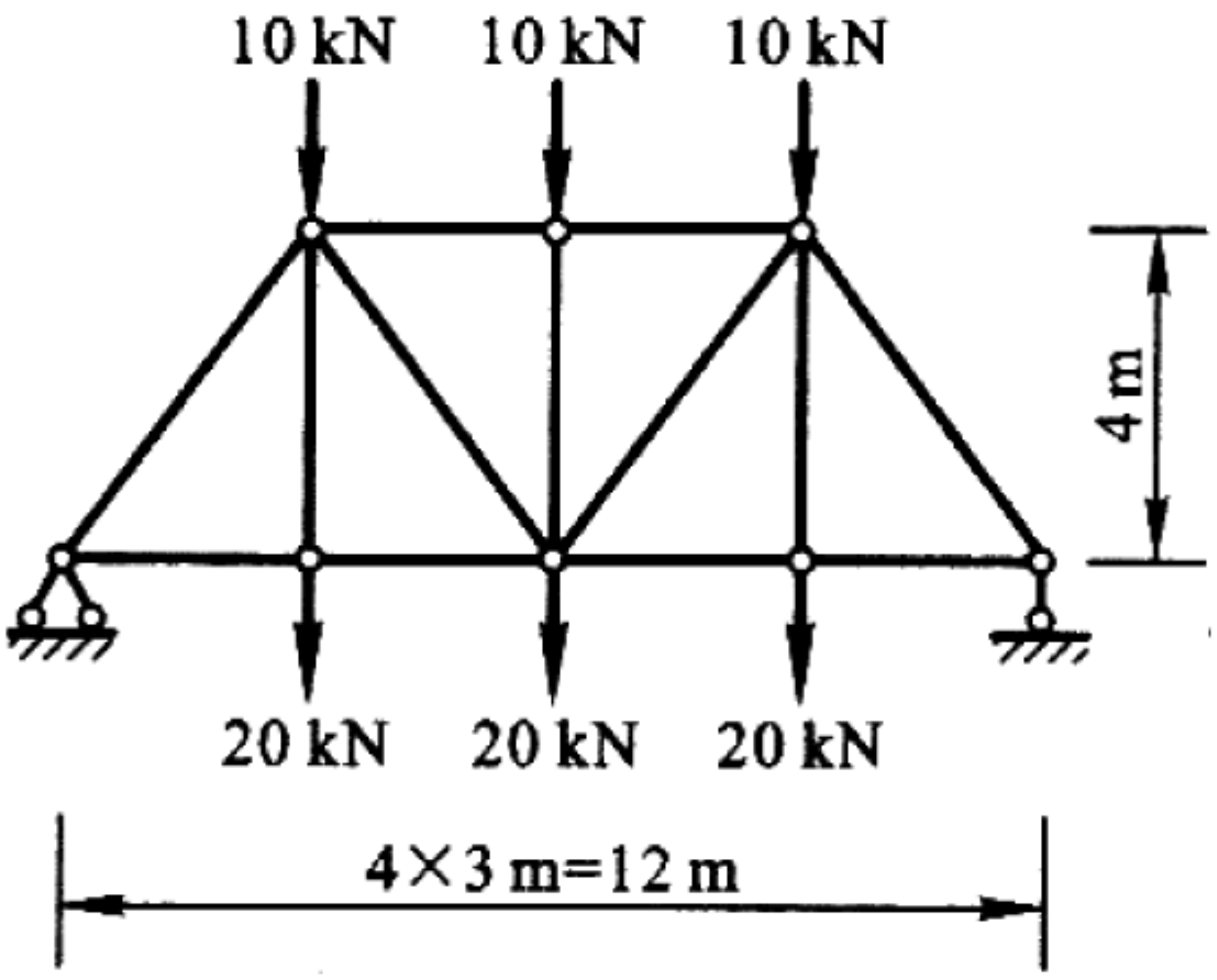


图 12-2-47（题 12-25）

解：桁架结构在外荷载作用下的内力值和在单位力作用下的内力值分别标于图 12-2-48 的（a）和（b）中。

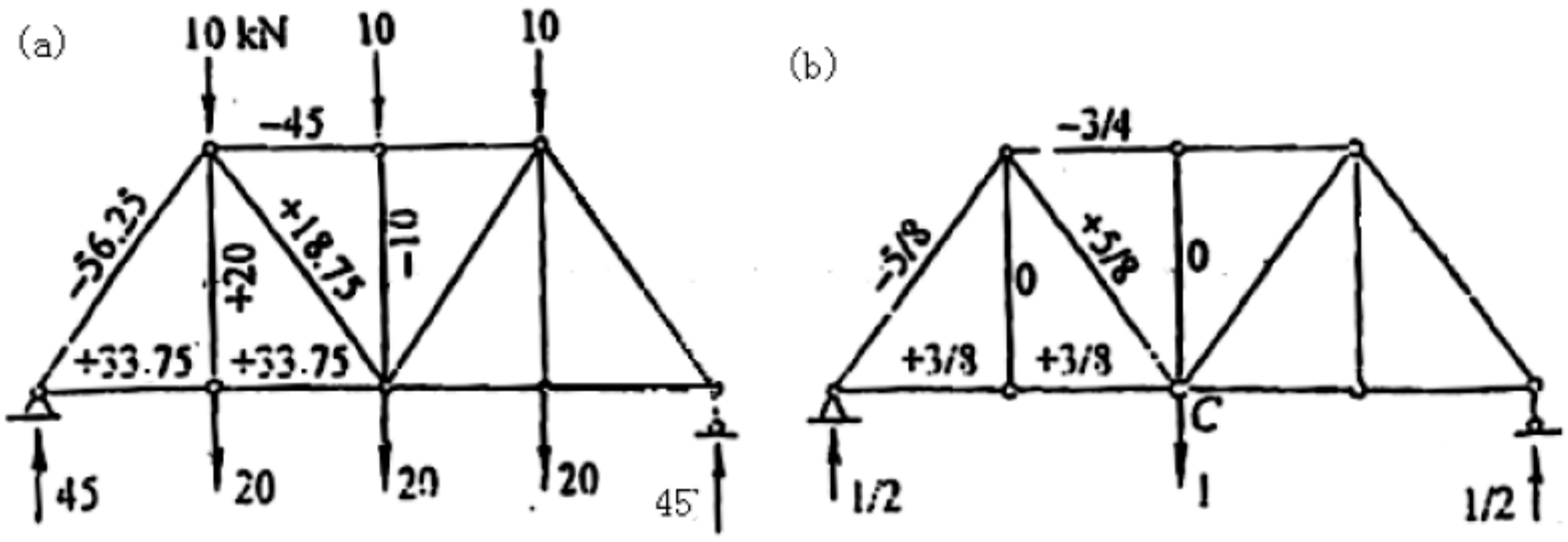


图 12-2-48

具体计算过程如下

$$\Delta_{cp}=\frac{1}{EA}\left(56.25\times\frac{5}{8}\times5+45\times\frac{3}{4}\times3+33.75\times\frac{3}{8}\times6+18.75\times\frac{5}{8}\times1\right)$$

$$=\frac{823.125}{EA}=\frac{823.125}{210\times10^{9}\times10^{-3}\times2\times10^{-3}}=1.96\times10^{-3}\text{m}$$

$$\omega=1.13\sqrt{\frac{g}{\Delta_{cp}}}=1.13\sqrt{\frac{9.81}{1.96\times10^{-3}}}=79.9\text{s}^{-1}$$

12.3　名校考研真题详解

一、填空题

1．设直杆的轴向变形不计，则图 12-3-1 所示体系的质量矩阵[M]=____。[西南交通大学 2007 研]

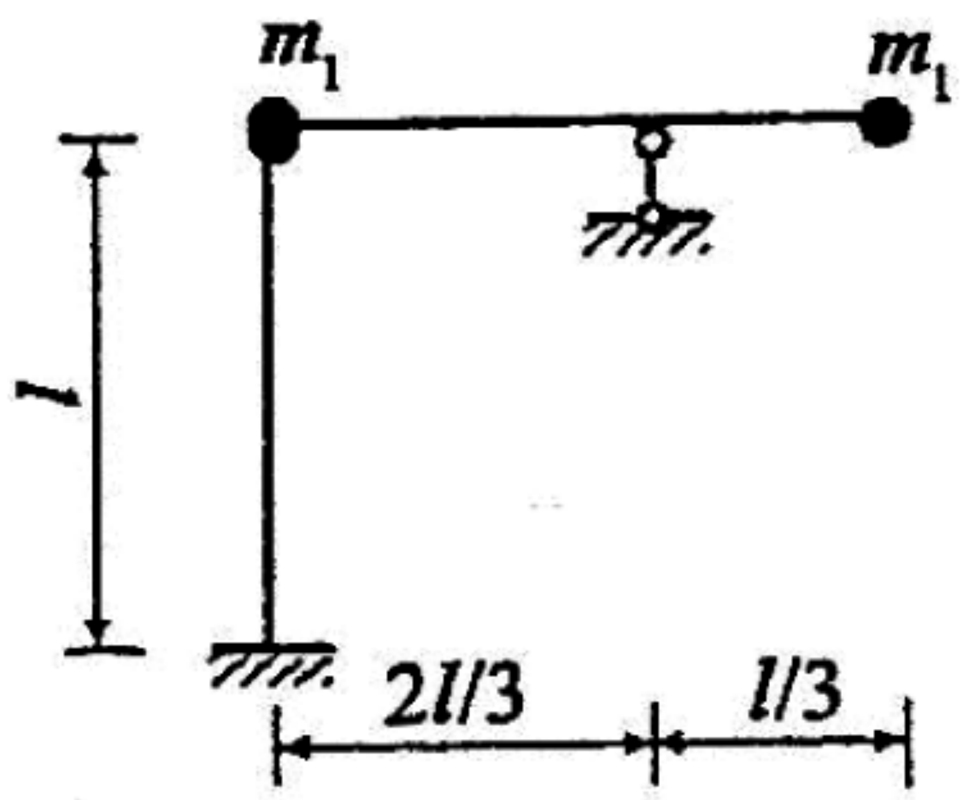


图 12-3-1

【答案】$\begin{bmatrix}2m_1 & 0\\ 0 & m_1\end{bmatrix}$

【解析】首先判断结构有两个动力自由度：最右端 m_1 的竖向自由度和水平方向上的自由度。竖向自由度对应的质点的质量为 m_1，水平自由度对应的质点的质量为 $2m_1$，故该结构的质量矩阵为$\begin{bmatrix}2m_1 & 0\\ 0 & m_1\end{bmatrix}$。

2．如下图 12-3-2 所示结构的动力自由度为_______（不计杆件质量）。[中南大学 2003 研]

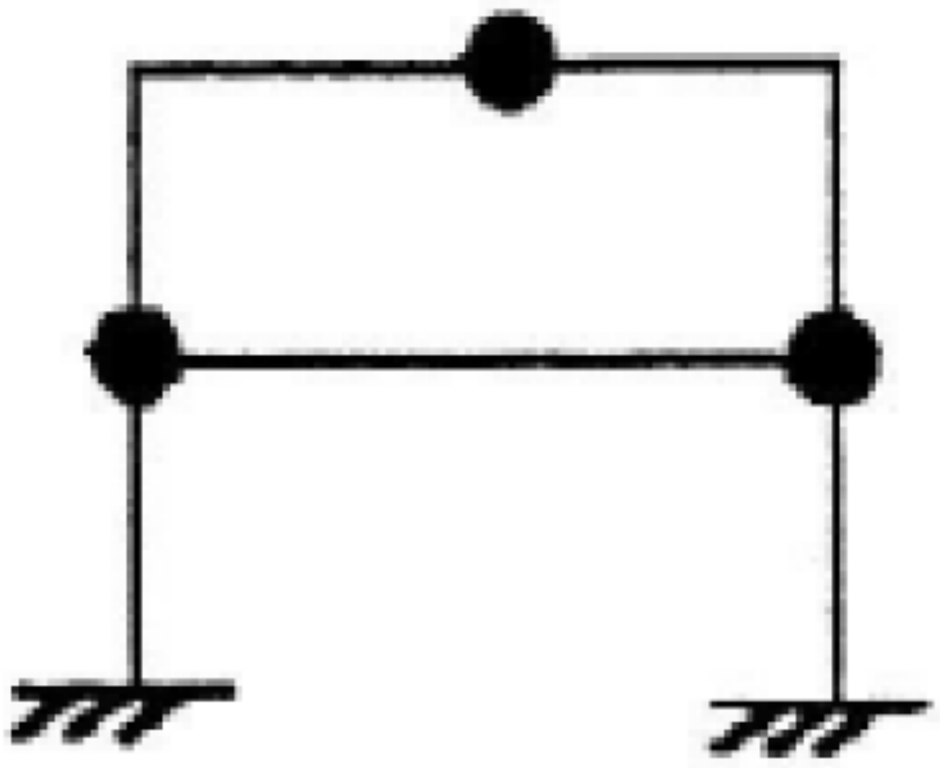


图 12-3-2

【答案】3

【解析】一个自由质点的动力自由度为两个（不考虑转动自由度），本题所示结构中有三个质点，第一层的两个质点只有一个水平自由度，第二层的质点有水平和竖向两个自由度，故一共有三个动力自由度。

二、选择题

1．图 12-3-3 所示结构，不计阻尼与杆件质量，若要发生共振，θ 应等于（　　）。[天津大学 2005 研]

A．$\sqrt{\dfrac{2k}{3m}}$　　B．$\sqrt{\dfrac{k}{3m}}$　　C．$\sqrt{\dfrac{2k}{5m}}$　　D．$\sqrt{\dfrac{k}{5m}}$

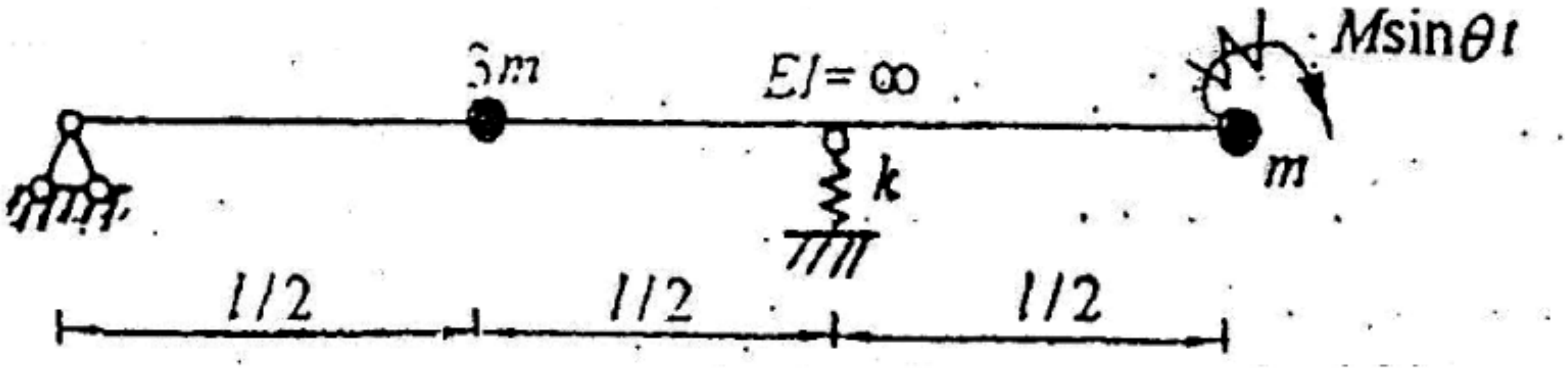


图 12-3-3

【答案】B

【解析】当体系的自振频率与外部激励荷载的频率相同时，体系发生共振。首先求该结构的自振频率，设 m 处的位移为 u（t），质量 m 处的惯性力向下为$m\ddot{u}$，质量 3m 处的惯性力向下$m\ddot{u}$，弹性力为向上为$\dfrac{2ku}{3}$，向左端铰支座处取矩，列运动方程为：$m\ddot{u}+\dfrac{1}{3}ku=0$；所以体系的自振频率为$\sqrt{\dfrac{k}{3m}}$。

2．图 12-3-4 所示体系（不计阻尼）的稳态最大动位移 $y_{max}=4Pl^3/9EI$，则最大的动力弯矩为（　　）。[浙江大学 2007 研]

A．7Pl/3　　B．4Pl/3　　C．Pl　　D．Pl/3

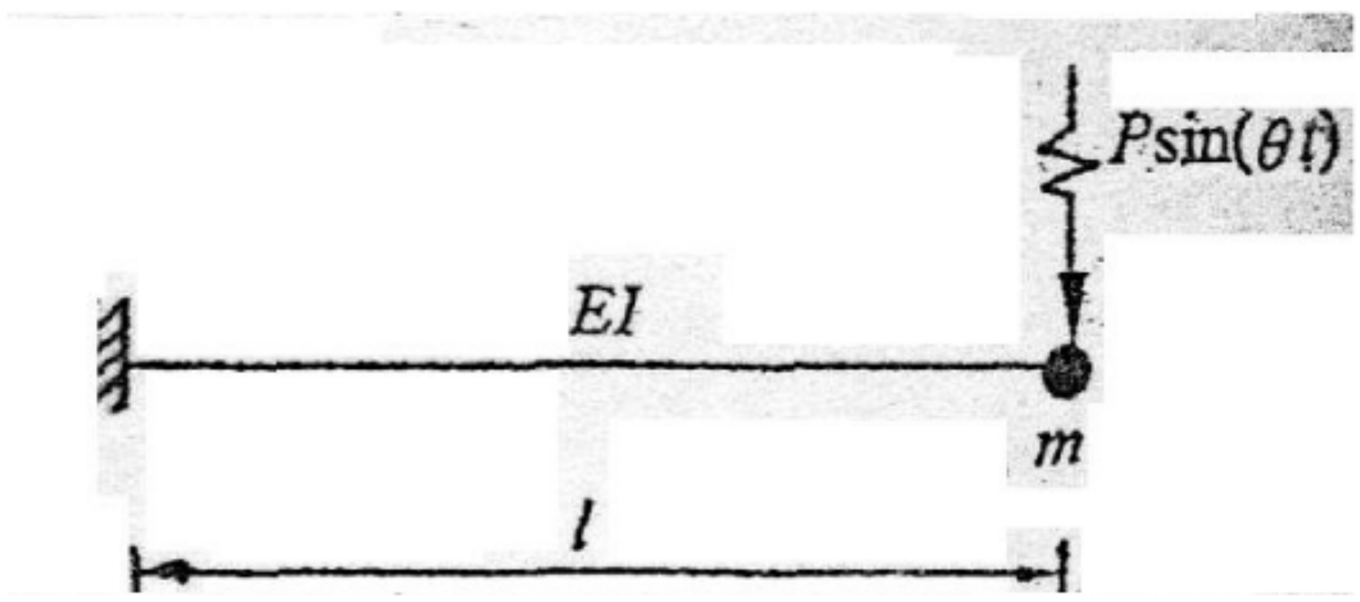


图 12-3-4

【答案】B

【解析】在质点 m 处的静位移为：$\delta = \dfrac{l^3}{3EI}$，则动力放大系数 $R_d = \dfrac{y_{max}}{\delta} = \dfrac{4}{3}$；最大静力弯矩为 P$l$，故最大动力弯矩为 $M = R_d Pl = \dfrac{4Pl}{3}$。

3．忽略直杆的轴向变形，则图 12-3-5 所示结构的振动自由度数目为（　　）。[浙江大学 2005 研]

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

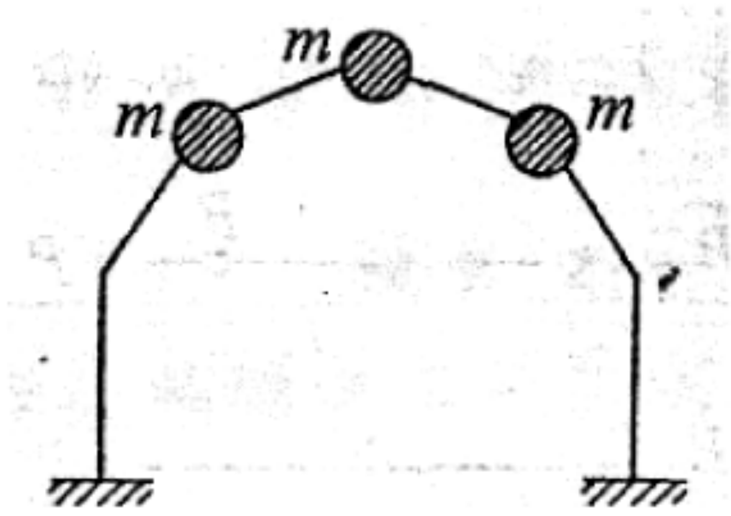


图 12-3-5

【答案】B

【解析】一个自由质点的动力自由度为两个（不考虑转动自由度），本题中有三个质点，当左右两个质点的水平和竖向位移确定后，中间质点的位置就确定了，所以动力自由度为 4 个。

4．图 12-3-6 所示单自由度动力体系中，质量 m 在杆件中点，各杆 EI、l 相同。其自振频率的大小排列次序为（　　）。[西南交通大学 2008 研]

A．(b) > (a) > (c)　　B．(c) > (b) > (a)　　C．(a) > (b) > (c)　　D．(a) > (c) > (b)

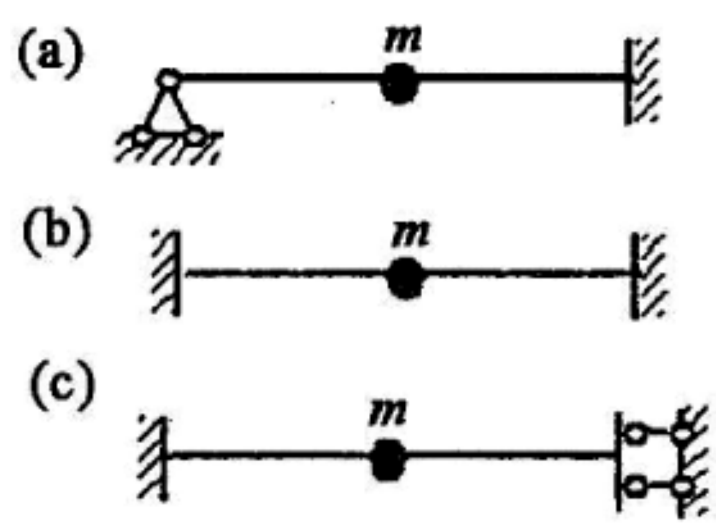


图 12-3-6

【答案】A

【解析】分别求三个图的自振频率。计算柔度 δ，（a）图中，$\delta = \dfrac{7l^3}{768EI}$；（b）图中，$\delta = \dfrac{l^3}{192EI}$；（c）图中，$\delta = \dfrac{5l^3}{192EI}$。所以刚度分别为：$\omega = \sqrt{\dfrac{768EI}{7ml^3}}$，$\omega = \sqrt{\dfrac{192EI}{ml^3}}$，$\omega = \sqrt{\dfrac{192EI}{5ml^3}}$。

5．图 12-3-7 所示结构的动力自由度为（不计杆件质量）（　　）。[中南大学 2005 研]

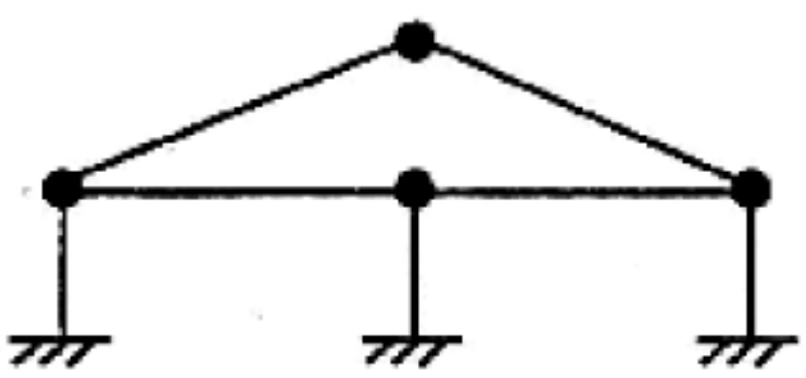


图 12-3-7

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】C

【解析】一个自由质点的动力自由度为两个（不考虑转动自由度），本题中有 4 个质点，最上部的质点有水平

和竖向两个自由度，三个共线的质点只有一个水平方向上的自由度，所以动力自由度为 3 个。

三、判断题

1．由于阻尼的存在，任何振动都不会长期继续下去。(　　) [天津大学 2005 研]

【答案】错

【解析】对于有阻尼体系的自由振动会逐渐衰减停止；对于有阻尼体系的强迫振动，分为瞬态响应和稳态响应，瞬态响应会随着时间增长而衰减消失；只要外部荷载不撤掉，稳态响应会一直持续下去。

2. 可用下述方法求图 12-3-8(a)所示单自由度体系的频率；由图 12-3-8(b)可知 $\delta_{11}=1/4k$，$\omega=\sqrt{1/2m\delta_{11}}=\sqrt{2k/m}$。(　　) [西南交通大学 2008 研]

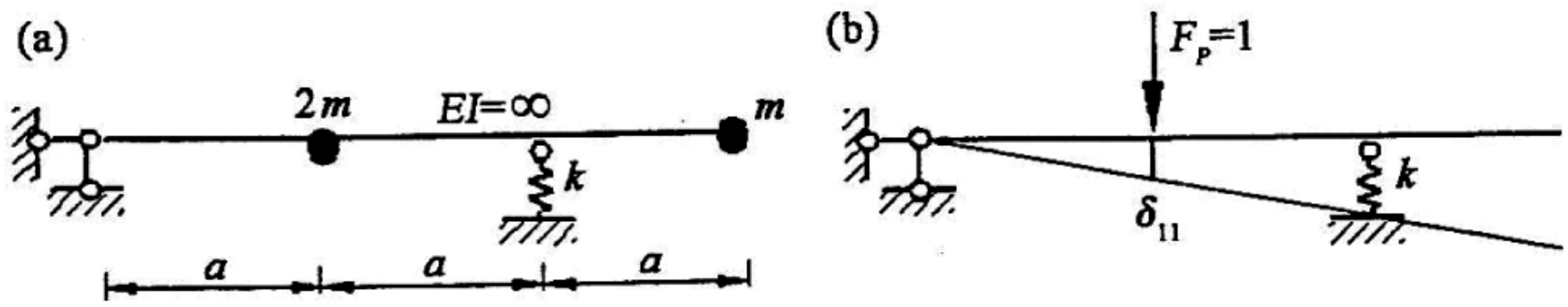


图 12-3-8

【答案】错

【解析】设质点 m 处的位移为 u，则体系惯性力分别为 $m\ddot{u}$ 和 $2m\ddot{u}$，支座处的弹簧弹力为 $\frac{2ku}{3}$，由平衡条件向左端支座处取矩列运动方程：$11m\ddot{u}+4ku=0$；所以该单自由度体系的频率 $\omega=\sqrt{\frac{4k}{11m}}$。

3．共振现象是结构本身固有的现象，与外部动力荷载无关。(　　) [湖南大学 2003 研]

【答案】错

【解析】体系的共振现象是当外部激励荷载的频率等于体系的自振频率时，发生的位移放大现象。所以共振不仅取决与体系的固有属性，同时也取决于外部动力荷载的频率。

四、计算题

1．求图 12-3-9 所示体系的自振频率和主振型。已知 EI 为常数。[西南交通大学 2008 研]

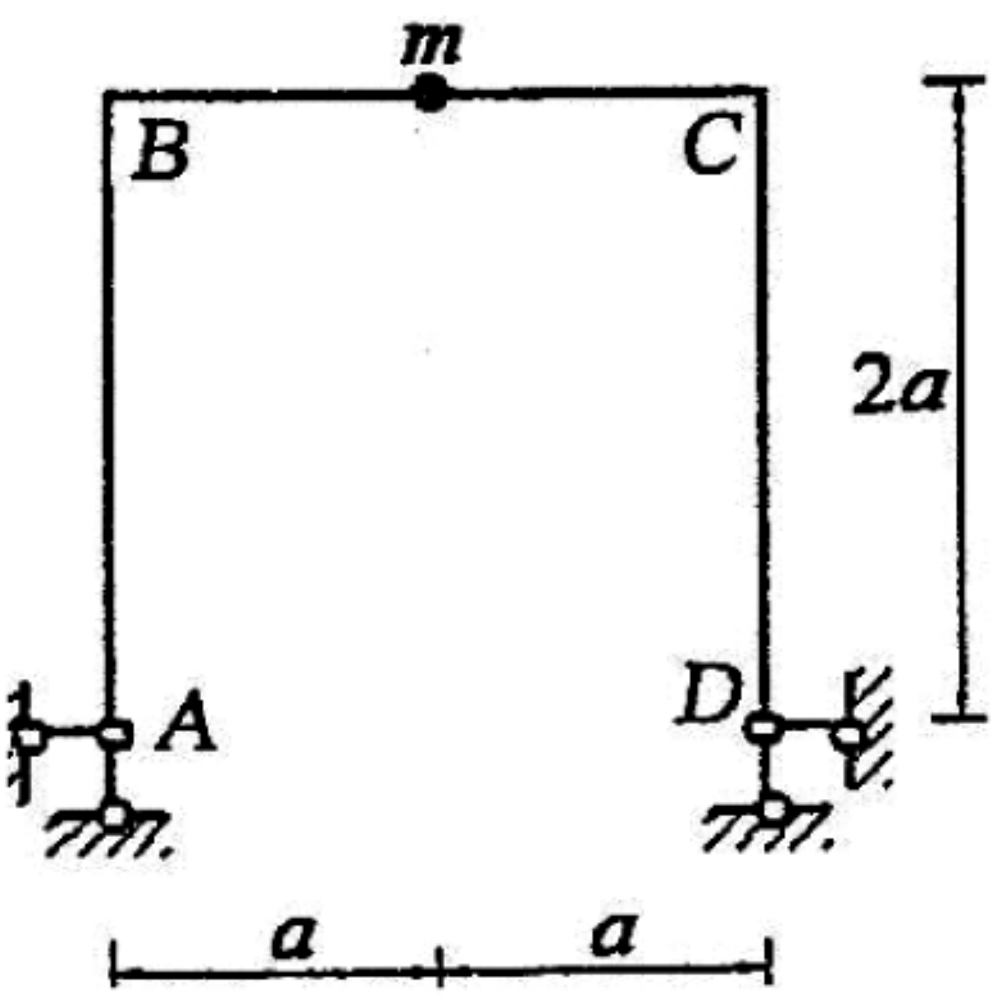


图 12-3-9

解：(1) 题图所示结构为对称结构，则结构的震动有两种形式：水平方向和竖直方向的震动。当结构在竖直方向上振动时为正对称结构，取左边为研究对象，竖向单位荷载作用下的弯矩图如下图 12-3-10 所示。

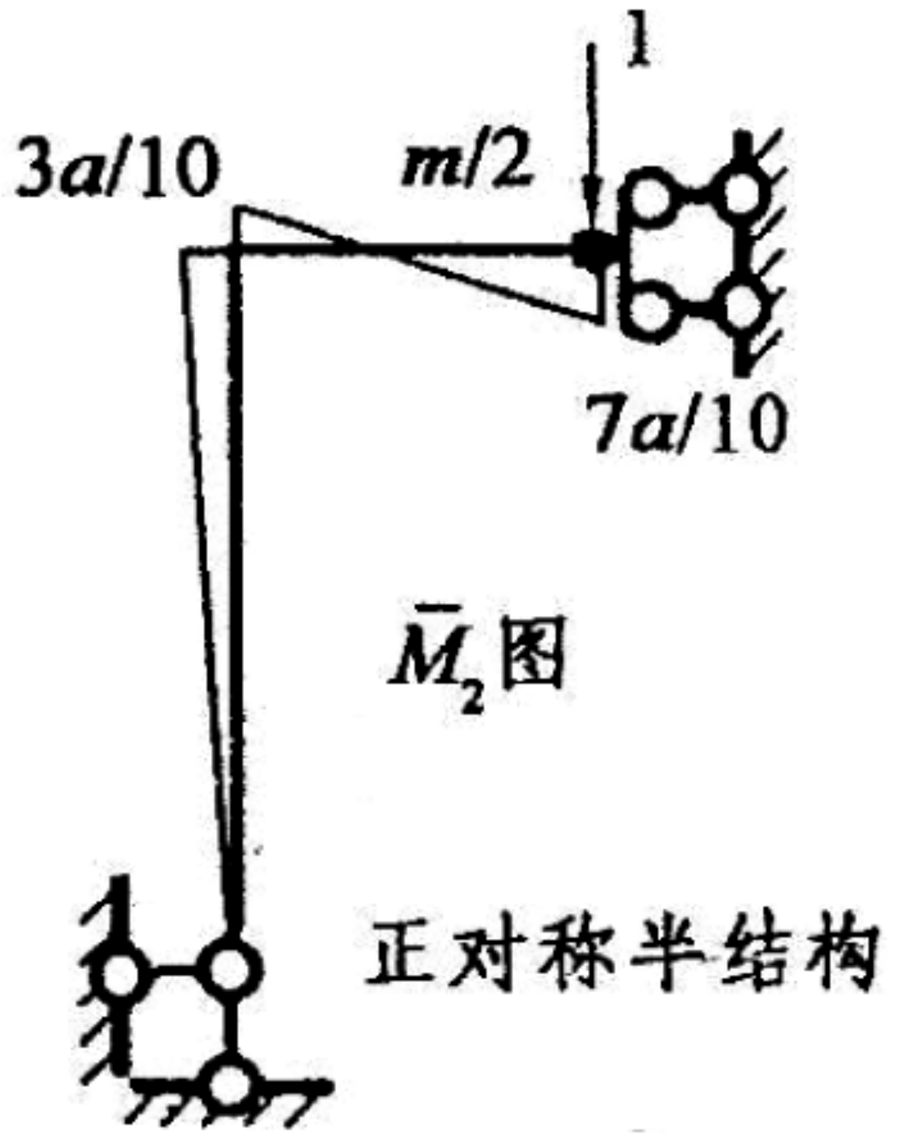


图 12-3-10

由图乘法可得

$$\sigma_{22} = 0.1833\frac{a^3}{EI}$$

则由柔度法可得振动频率为

$$\omega_2 = 3.3.32\sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

（2）当结构在水平方向上振动时，为反对称结构，则单位荷载作用下的弯矩图如下图 12-3-11 所示。

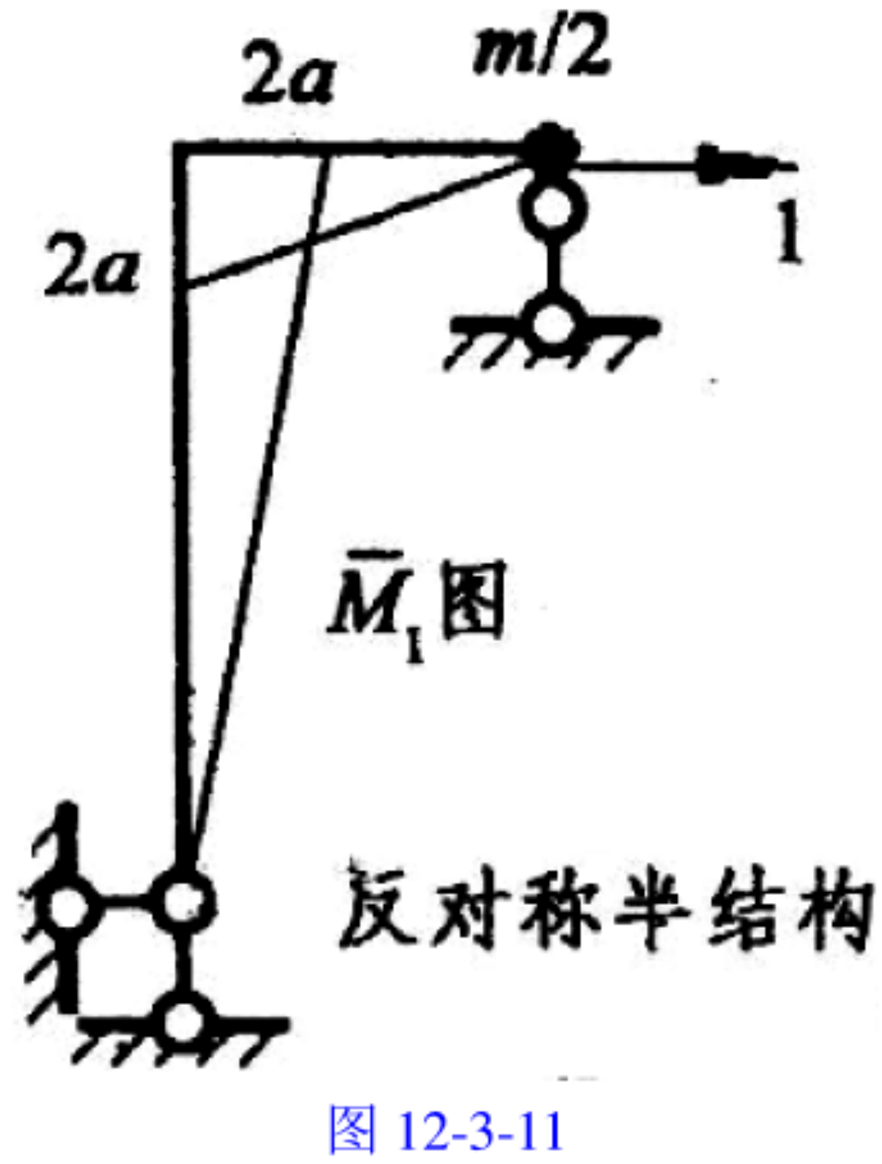


图 12-3-11

由图乘法可得

$$\sigma_{11} = \frac{4a^3}{EI}$$

则振动频率为

$$\omega_1 = 0.7071\sqrt{\frac{EI}{ma^3}}$$

2．求图 12-3-12 所示体系的自振频率。[福州大学 2007 研]

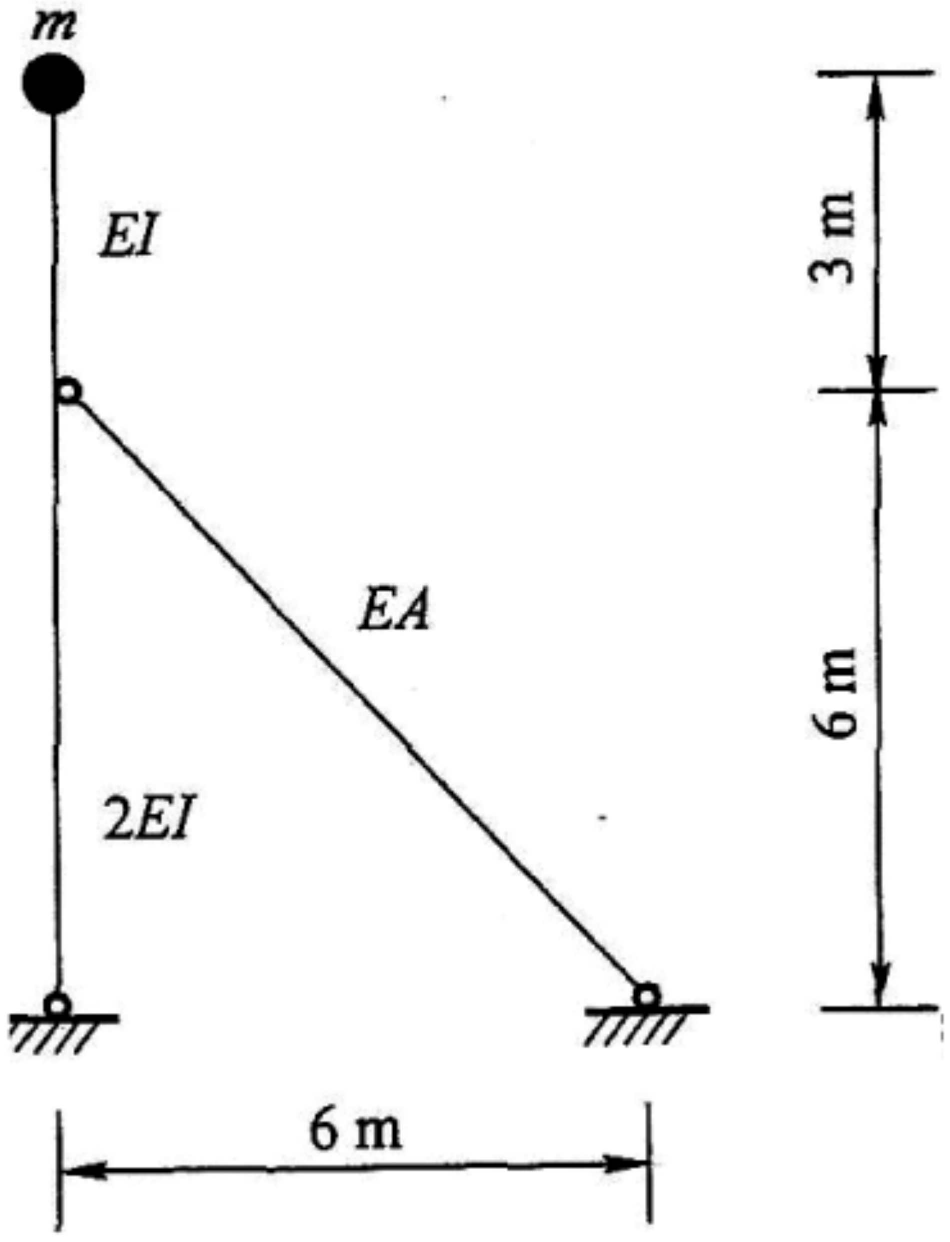


图 12-3-12

解：在 m 处加一个水平向右的单位力，为基本体系，则可绘制出如下图 12-3-13 所示。

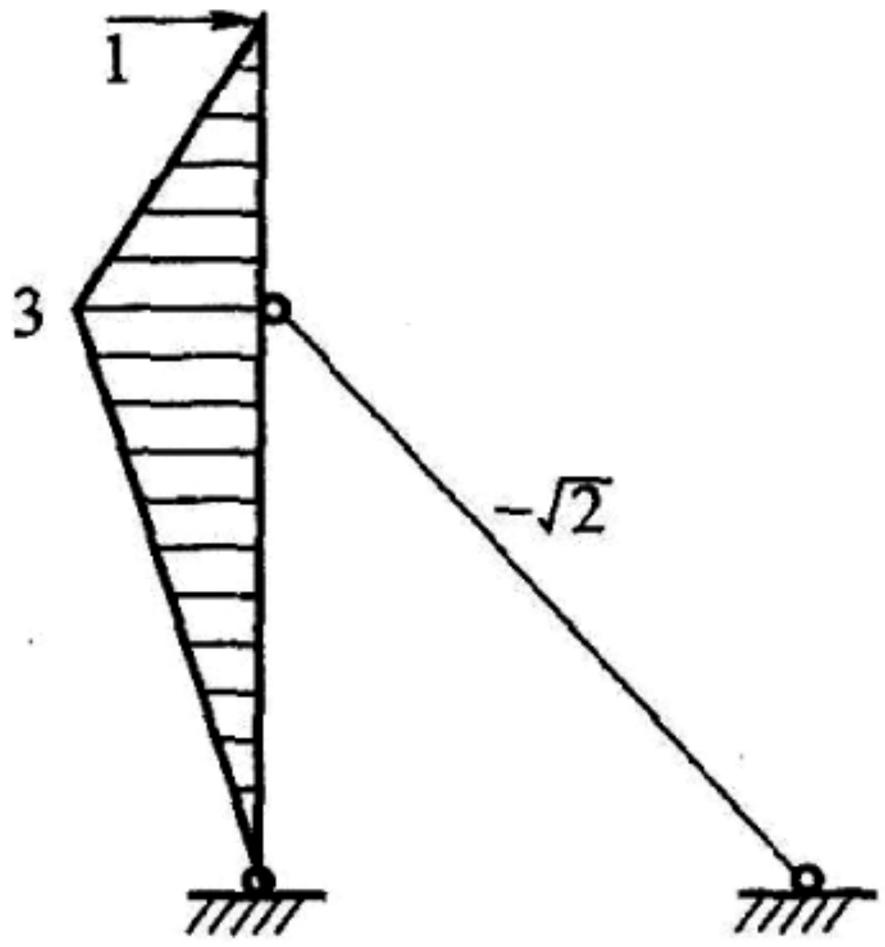


图 12-3-13

利用图乘法可得

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\times3\times3\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2EI}\cdot\frac{1}{2}\times6\times3\times\frac{2}{3}\times3+\frac{1}{EA}\cdot(-\sqrt{2})^2\times6\sqrt{2}$$
$$=\frac{18}{EI}+\frac{12\sqrt{2}}{EA}$$

所以可得振动频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}=\sqrt{\frac{1}{m\left(\frac{18}{EI}+\frac{12\sqrt{2}}{EA}\right)}}$$

3．在图 12-3-14 示体系中，m 为集中质量，各杆 EI=常数。试求体系的自振频率并绘出相应的模型。[同济大学 2003 研]

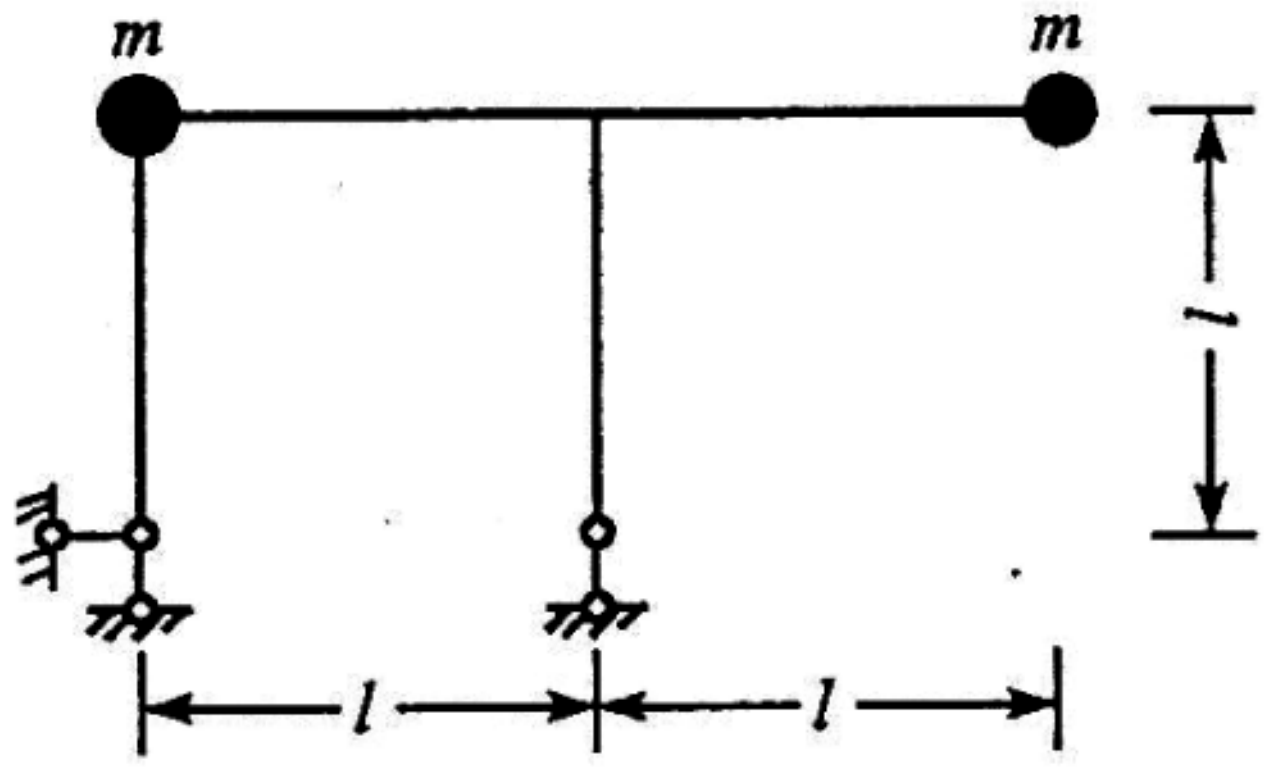


图 12-3-14

解：（1）采用柔度法进行求解，由图示结构可以看出存在两中振动形式，一个是水平方向上的震动，一个是垂直方向的震动，则柔度法振型方程为

$$\begin{bmatrix} m_1 f_{11}-\frac{1}{\omega^2} & m_2 f_{12} \\ m_1 f_{21} & m_2 f_{22}-\frac{1}{\omega^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

（2）分别在结构的悬臂端加垂直向下的单位力和水平向右的单位力，分别绘制此时的弯矩图，如下图 12-3-15 所示。

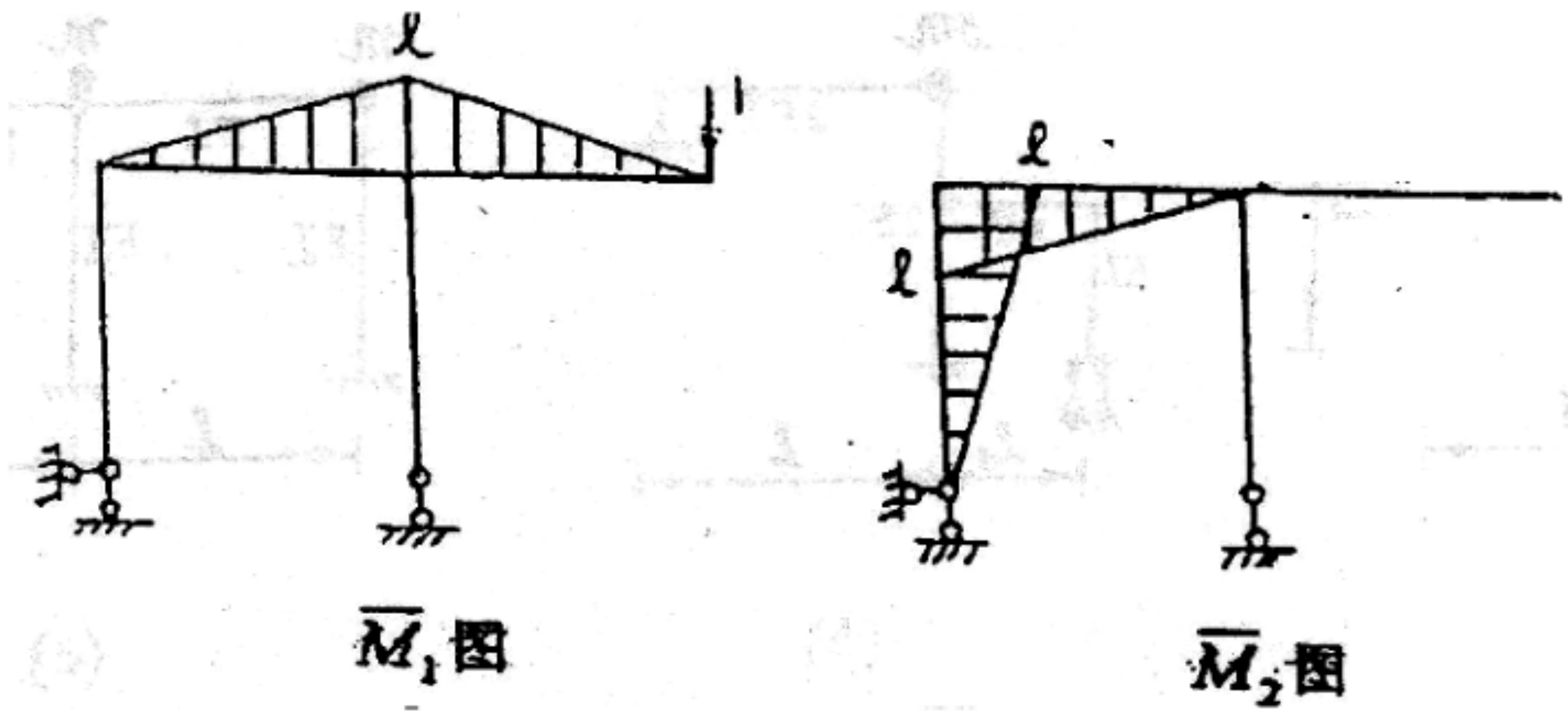


图 12-3-15

则由图乘法可得

$$f_{11}=\frac{I^3}{3EI}\times 2=\frac{2I^3}{3EI}=f_{22}$$

$$f_{12}=f_{21}=-\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times l^2\times\frac{I}{3}\right)=-\frac{I^3}{6EI}$$

又 $m_1=m$、$m_2=2m$，代入振型方程中可得

$$\begin{vmatrix} \frac{2ml^2}{3EI}-\frac{1}{\omega^2} & -\frac{ml^3}{3EI} \\ -\frac{ml^3}{6EI} & \frac{4ml^3}{3EI}-\frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix}=0$$

化简可得

$$\frac{1}{\omega^4}-\frac{2ml^3}{EI}\bullet\frac{1}{\omega^2}+\frac{5}{6}\left(\frac{ml^3}{EI}\right)^2=0$$

解得

$$\omega_1 = 0.8427\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}，\ \omega_2 = 1.300\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

（3）令 $A_{11} = 1$，并将 ω_1 代入振型方程的第一个方程中，可得

$$A_{21} = \frac{\frac{1}{\omega_1^2} - m_1 f_{11}}{m_2 f_{12}} = \frac{1.4082 - \frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2.225$$

同理，令 $A_{12} = 1$，将 ω_2 ω_2 代入振型方程中的第二个方程，则

$$A_{22} = \frac{\frac{1}{\omega_2^2} - m_1 f_{11}}{m_2 f_{12}} = \frac{0.5918 - \frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}} = -0.225$$

所以振动的两个振型分别为

$$\{A\}_1 = \begin{Bmatrix} I \\ -2.225 \end{Bmatrix}，\ \{A\}_2 = \begin{Bmatrix} I \\ 0.225 \end{Bmatrix}$$

绘制振型图，如下图 12-3-16 所示。

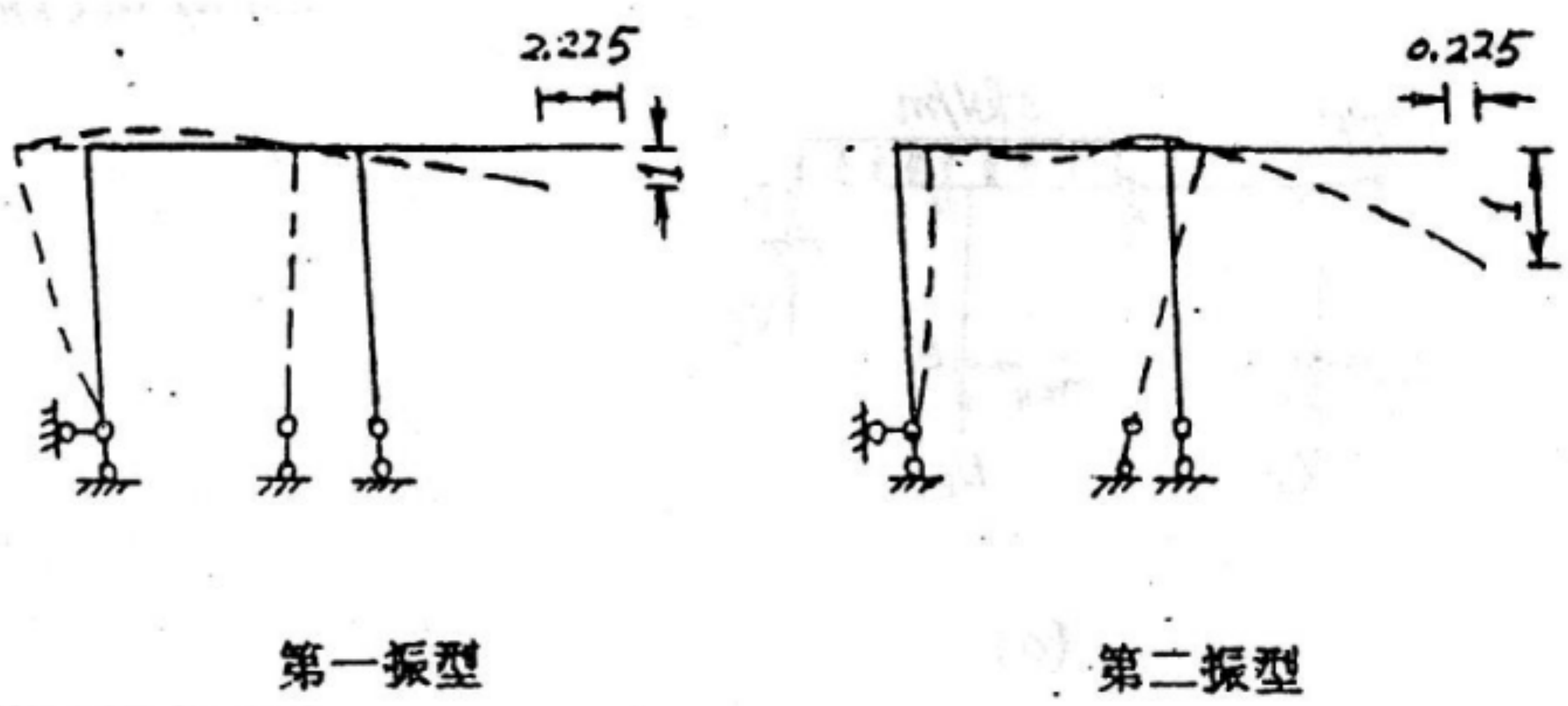


图 12-3-16

第 13 章　结构弹性稳定

13.1　复习笔记

【知识框架】

- 结构弹性稳定
  - 结构失稳概述
    - 结构失稳形式
      - 第一类失稳（分支点失稳）
      - 第二类失稳（极值点失稳）
    - 临界荷载的确定
    - 结构稳定的自由度
  - 用静力法确定临界荷载
    - 静力法的描述
    - 单自由度结构的举例
    - 多自由度结构的举例
  - 具有弹性支座压杆的稳定
    - 弹性支座压杆的描述
    - 解弹性支座压杆稳定的具体步骤
    - 其他支座形式的稳定问题
  - 用能量法确定临界荷载
    - 能量法的描述
    - 势能驻值原理
    - 稳定方程的建立
      - 单自由度体系
      - 多自由度体系
  - 变截面压杆的稳定
    - 阶形杆的稳定
    - 截面惯性矩按幂函数连续变化的压杆的稳定
  - 剪力对临界荷载的影响
    - 建立挠曲线微分方程
    - 求解挠曲线微分方程
  - 组合压杆的稳定
    - 组合压杆的定义
    - 联结件的形式：缀条式、缀板式
    - 组合压杆临界荷载的计算
    - 缀条式组合压杆的稳定计算
    - 缀板式组合压杆的稳定计算
  - 弹性介质上压杆的稳定
  - 圆环及拱的稳定
  - 窄条梁的稳定
    - 窄条梁的失稳形式
    - 窄条梁的稳定微分方程
    - 窄条梁的稳定临界荷载
  - 用矩阵位移法计算刚架的稳定

【重点难点归纳】

一、结构失稳概述

1．结构失稳形式

（1）第一类失稳（分支点失稳）

①失稳过程

a．直线平衡状态

如图 13-1-1（a）所示，理想中心受压直杆在荷载较小时，因外界的干扰而发生的弯曲可以在干扰消除后得到自行恢复。

b．弯曲平衡状态

如图 13-1-1（b）所示，理想中心受压直杆在荷载达到一定时，因外界的干扰而发生的弯曲在干扰消除后得到保持。直线平衡形式不稳定，直杆可以具有两种平衡形式。

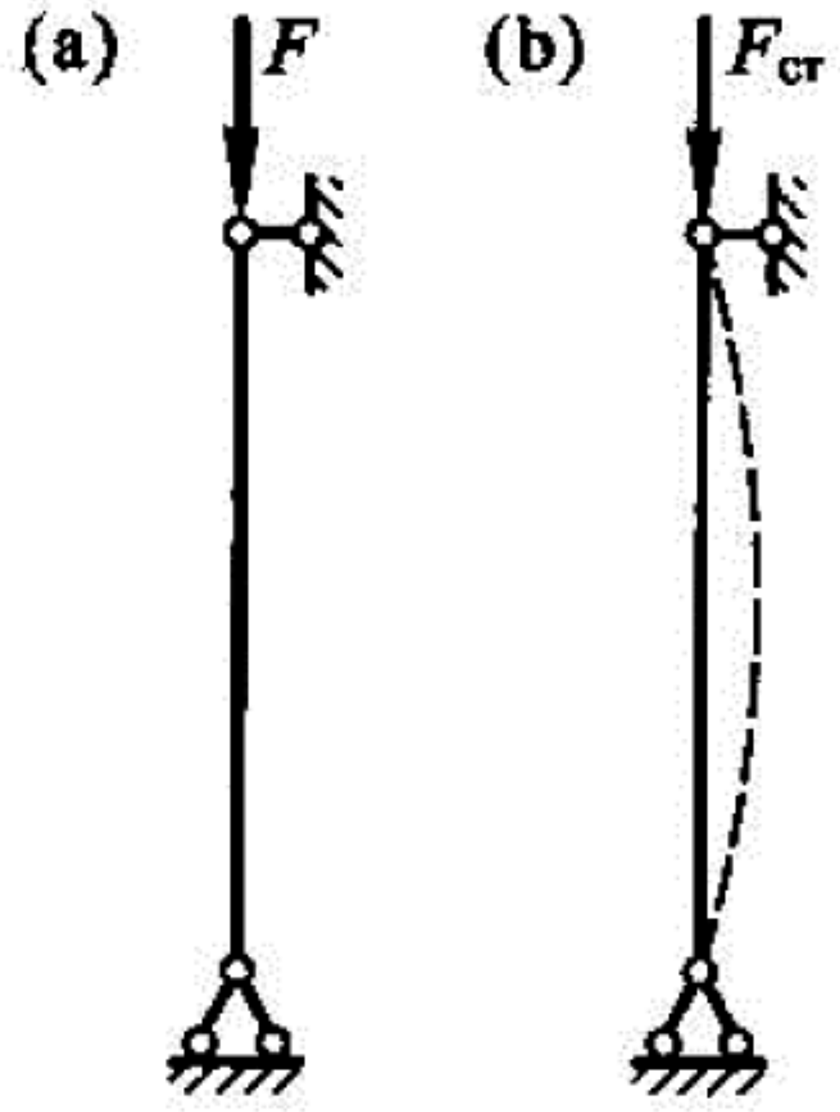


图 13-1-1

②临界荷载 F_{cr}

临界荷载是指使直杆刚好丧失第一类稳定性的荷载。它是使结构原有平衡形式保持稳定的最大荷载，也是使结构产生新的平衡形式的最小荷载。

③特征

结构的平衡形式即内力和变形状态发生质的突变，原有平衡形式成为不稳定的，同时出现新的有质区别的平衡形式。

（2）第二类失稳（极值点失稳）

①失稳过程

a．$F<F_{cr}$

如图 13-1-2（a）所示，由塑性材料制成的偏心受压直杆，始终处于同时受压和受弯的状态。F 不增加，杆件的挠度不会增加。

b．$F>F_{cr}$

如图 13-1-2（b）所示，当 F 达到临界值 F_{cr}（比上述中心受压直杆的临界荷载小）时，即使荷载不增加甚至减小，挠度仍继续增加。

②特征

平衡形式并不发生质变，变形按原有形式迅速增长，使结构丧失承载能力。

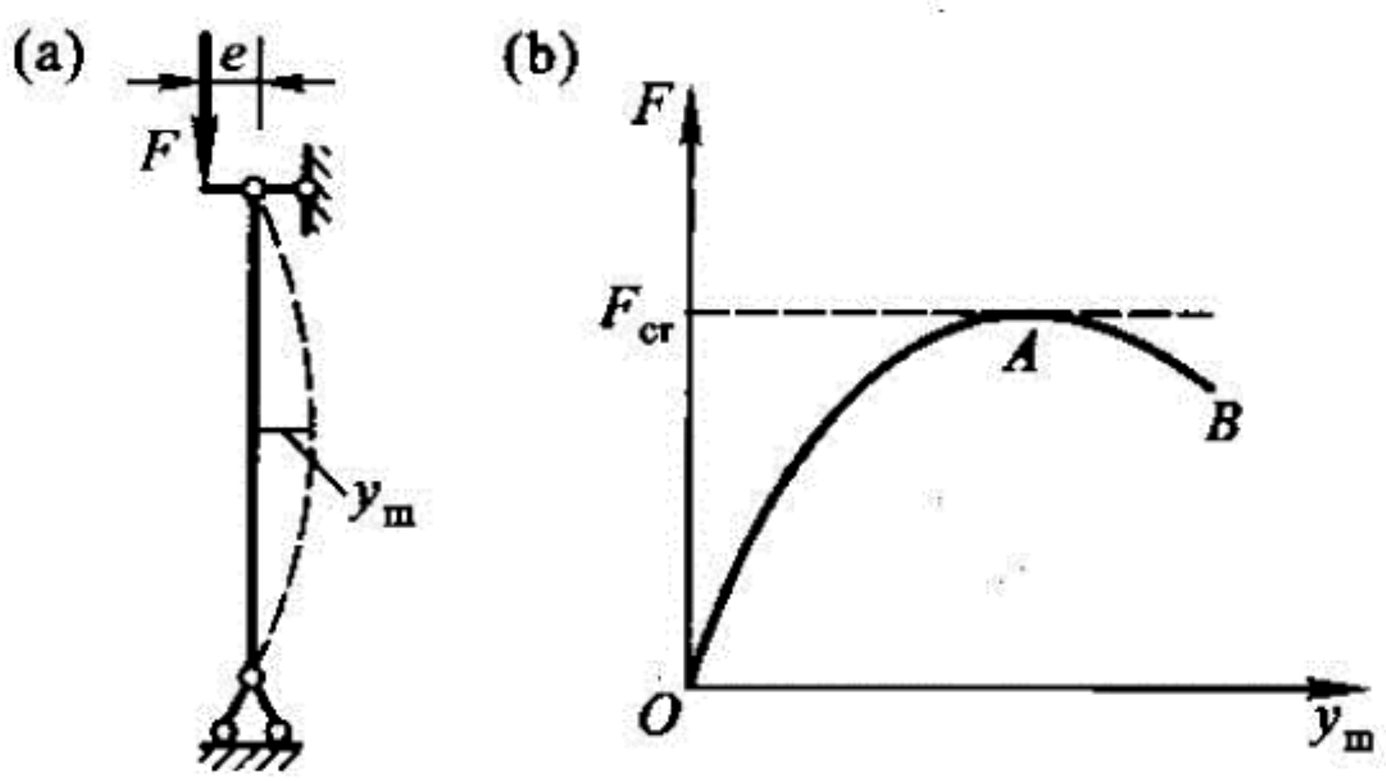


图 13-1-2

2．临界荷载的确定

（1）方法

①静力法；

②能量法。

（2）异同点

①共同点

它们都是从平衡的二重性出发，根据结构失稳时可具有原来的和新的两种平衡形式，来寻求结构在新的形式下能维持平衡的荷载，从而确定临界荷载。

②不同点

静力法是应用静力平衡条件，而能量法则是应用以能量形式表示的平衡条件。

3．结构稳定的自由度

自由度是指为确定结构失稳时所有可能的变形状态所需的独立参数数目。

二、用静力法确定临界荷载

1．方法

以结构失稳时平衡的二重性为依据，应用静力平衡条件，寻求结构在新的形式下能维持平衡的荷载，其最小值即为临界荷载。

2．举例（单自由度结构）

图 13-1-3（a）所示单自由度结构，刚性压杆下端抗转弹簧的刚度（发生单位转角所需的力偶）为 k_0，设压杆偏离竖直位置时（图 13-1-3（b））仍处于平衡状态，求其临界荷载。

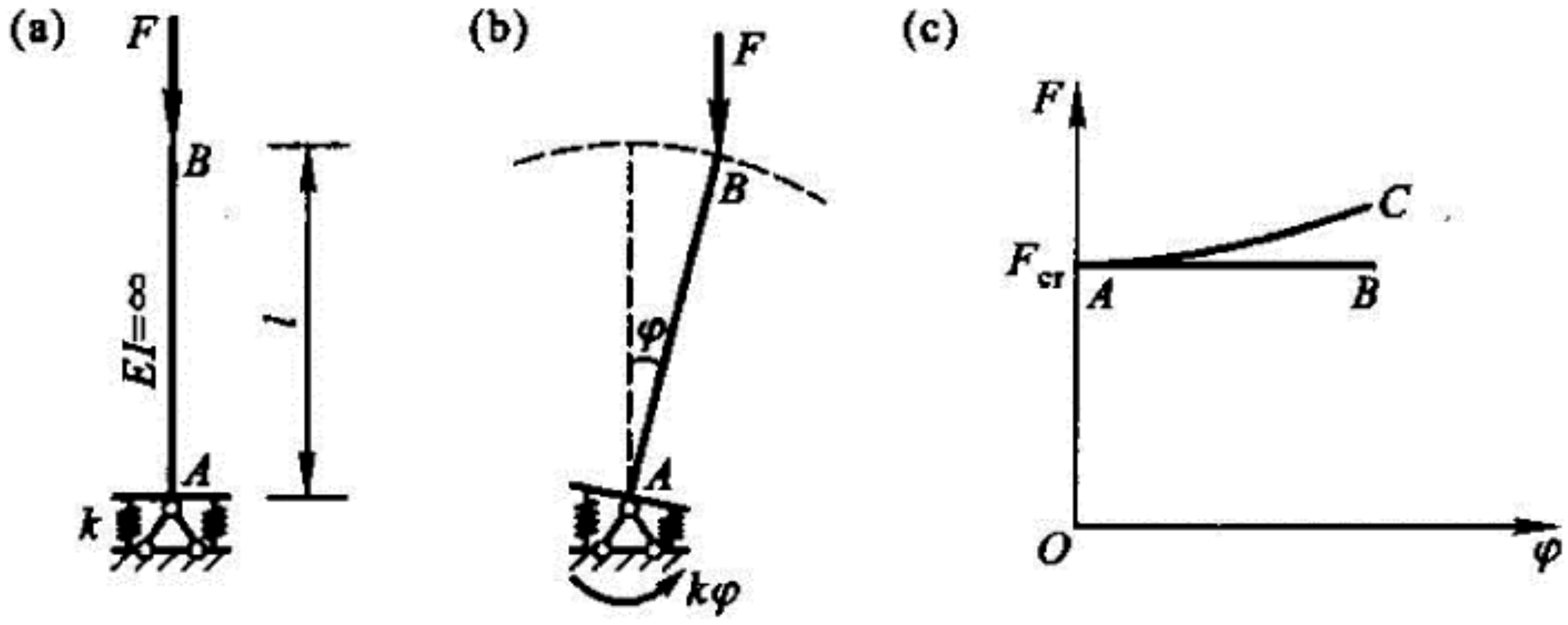


图 13-1-3

（1）平衡条件

$$Fl\sin\varphi - k\varphi = 0 \qquad (13\text{-}1)$$

当位移很微小时，$\sin\varphi = \varphi$，式（13-1）可近似写为

$$(Fl - k)\varphi = 0 \qquad (13\text{-}2)$$

（2）平衡二重性

①对于原有的平衡形式，$\varphi = 0$，上式成立；

②对于新的平衡形式，$\varphi \neq 0$，因而 φ 的系数应等于零，即

$$Fl - k = 0 \qquad (13\text{-}3)$$

式（13-3）称为稳定方程或特征方程。

（3）临界荷载

由式（13-3）可解出临界荷载为

$$F_{cr} = \frac{k}{l}$$

（4）随遇平衡状态

①定义

当 $F = F_{cr}$ 时，无论 φ 为任何数值均可满足平衡方程（13-2），结构此时所处的状态称为随遇平衡状态（图 13-1-3（c）中的水平线 AB）。

②原因

采用近似方程（13-2）所带来的假象，若采用精确的方程（13-1）则有

$$F = \frac{k\varphi}{l\sin\varphi}$$

当 $\varphi \neq 0$ 时，φ 与 F 的数值仍是一一对应的（图 13-1-3（c）中的曲线 AC）。

③近似处理

若不涉及失稳后的位移计算而只要求临界荷载的数值。则可采用近似方程求解。

3．多自由度结构

对于具有 n 个自由度的结构

（1）对新的平衡形式列出 n 个平衡方程，它们是关于 n 个独立参数（不全为 0）的齐次方程；

（2）由系数行列式 D＝0 建立稳定方程；

（3）求解稳定方程的 n 个特征荷载，其最小值便为临界荷载。

三、具有弹性支座压杆的稳定

1．弹性支座压杆

在一些刚架中，常可将基座中某根压杆取出，以弹性支座代替其余部分对它的约束作用。

2．举例

（1）原结构：如图 13-1-4（a）所示刚架，AB 杆上端铰支，下端不能移动而可转动，但其转动要受到 BC 杆的弹性约束。

（2）弹性支座压杆：将 BC 杆的弹性约束用一个抗转弹簧来表示，如图 13-1-4（b）所示。

（3）抗转弹簧的刚度 K_1

由使结构其余部分即梁 BC 的 B 端发生单位转角时所需的力偶来确定，由图 13-1-4（c）知

$$k_1=\frac{3EI_1}{l_1}$$

（4）稳定方程

①平衡条件

图 13-1-4（b）所示压杆失稳时，设下端转角为 φ_1，则相应的反力偶为 $M_1=k_1\varphi_1$，设上端反力为 F_R，则由平衡条件 $\Sigma M_B=0$ 可得

$$F_R=\frac{M_1}{l}=\frac{k_1\varphi_1}{l} \qquad (13\text{-}4)$$

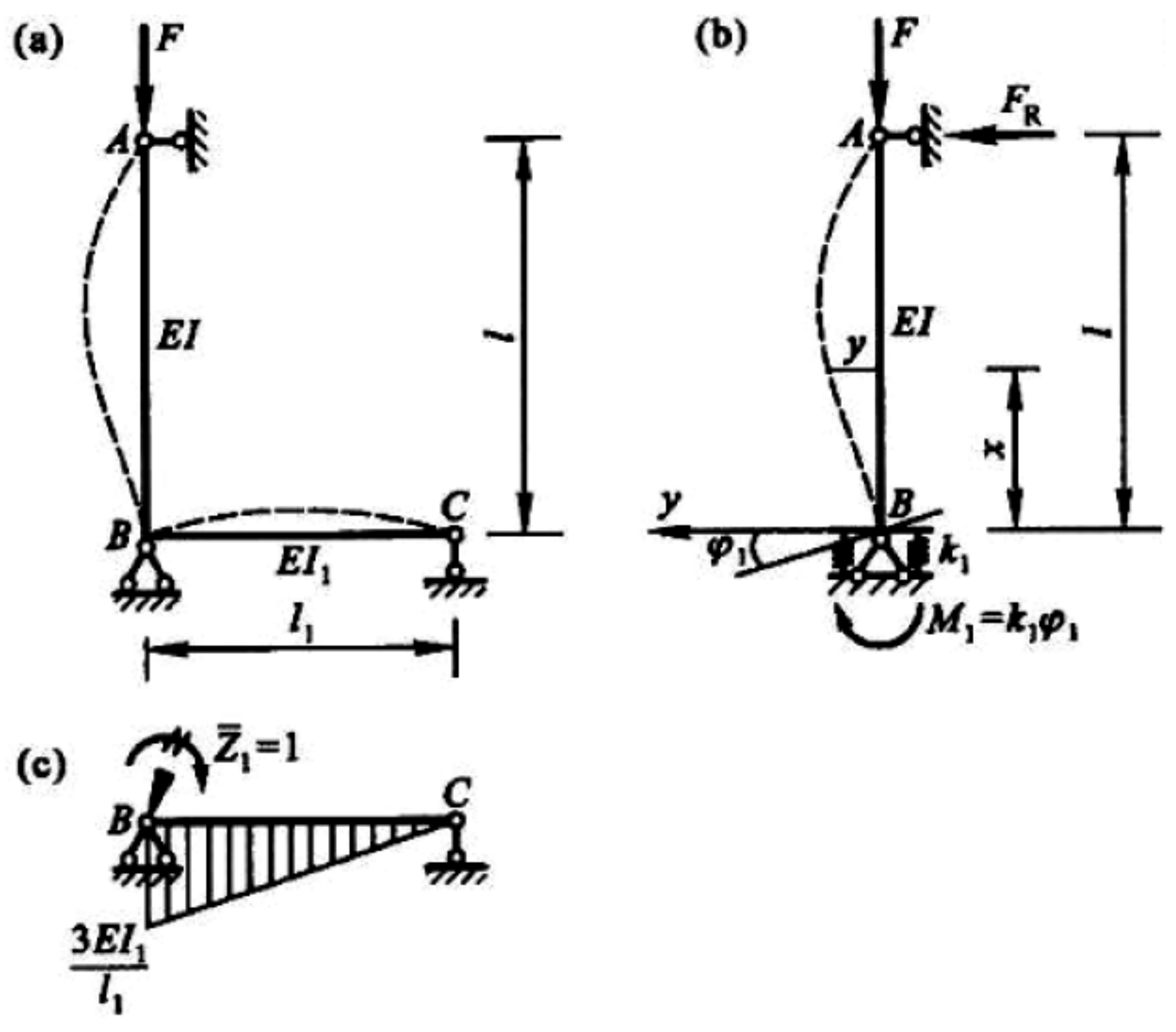


图 13-1-4

②平衡微分方程

压杆挠曲线的平衡微分方程为

$$EIy''=-Fy+F_R(l-x)$$

令 $n^2=\frac{F}{EI}$，并注意到式（13-4），则上述微分方程可写为

$$y'' + n^2 y = \frac{k_1 \varphi_1}{EIl}(l - x)$$

③求解

a．通解

$$y = A\cos nx + B\sin nx + \frac{k_1 \varphi_1}{Fl}(l - x)$$

b．边界条件

当 x＝0 时，y＝0，y′＝φ_1；当 x＝l，y＝0。

c．齐次方程组

$$\left.\begin{aligned} &A + \frac{k_1}{F}\varphi_1 = 0 \\ &Bn - \left(\frac{k_1}{Fl} + 1\right)\varphi_1 = 0 \\ &A\cos nl + B\sin nl = 0 \end{aligned}\right\}$$

d．稳定方程

A、B 和 φ_1 不能全为零，因而稳定方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{k_1}{F} \\ 0 & n & -\left(\frac{k_1}{Fl} + 1\right) \\ \cos nl & \sin nl & 0 \end{vmatrix} = 0$$

e．最终结果

$$\tan nl = \frac{nl}{1 + \frac{EI}{k_1 l}(nl)^2} \qquad (13\text{-}5)$$

当弹簧刚度 k_0 之值给定时，由此超越方程解出 nl 的最小正根，从而求得临界荷载 Fcr。

f．特殊情况

第一，当 k_1＝0 时，变成两端铰支的情形，式（13-5）便成为

$$\sin nl = 0$$

第二，当 k_1＝∞时，变成为一端铰支一端固定的情况，此时式（13-5）变成

$$\tan nl = nl。$$

3．其他情形

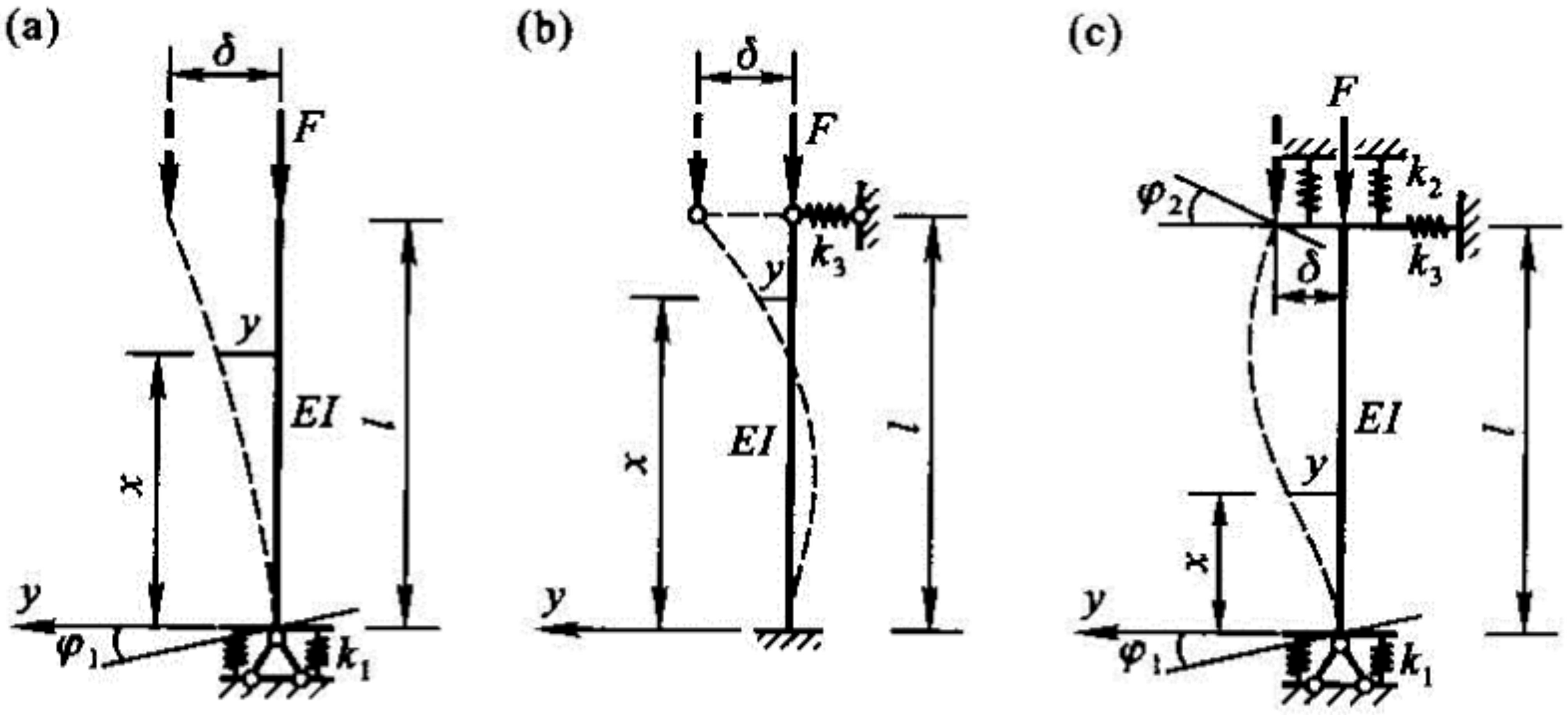


图 13-1-5

（1）一端弹性固定一端自由

如图 13-1-5（a）所示，其稳定方程为

$$nl\tan nl=\frac{k_1 l}{EI}$$

（2）一端固定一端有一抗移弹簧支座

如图 13-1-5（b）所示一端，稳定方程为

$$\tan nl=nl-\frac{EI(nl)^3}{k_3 l^3}$$

式中 k_3 是抗移弹簧的刚度。

（3）两端各有一抗转弹簧，上端并有一抗移弹簧

如图 13-1-5（c）所示，按静力法可导出其稳定方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \left(1-\frac{k_3 l}{F}\right) & \frac{k_2}{F} \\ \cos nl & \sin nl & 0 & \frac{k_2}{F} \\ 0 & n & \left(\frac{k_3}{F}+\frac{k_3 l}{k_1}-\frac{F}{k_1}\right) & -\frac{k_2}{k_1} \\ -n\sin nl & n\cos nl & \frac{k_3}{F} & 1 \end{vmatrix}=0$$

这是弹性支座压杆稳定方程的一般情形，其它特殊情形的稳定方程可由此推得。

四、用能量法确定临界荷载

1．方法

用能量法确定临界荷载，就是以结构失稳时平衡的二重性为依据，应用以能量形式表示的平衡条件，寻求结构在新的形式下能维持平衡的荷载，其中最小者即为临界荷载。

2．势能驻值原理

（1）表述

对于弹性结构，在满足支承条件及位移连续条件的一切虚位移中，同时又满足平衡条件的位移（因而就是真实的位移）使结构的势能 E_p 为驻值，也就是结构势能的一阶变分等于零，即

$$\delta E_p=0$$

（2）基本概念

①结构的势能

结构的势能（或称结构的总势能）E_p 等于结构的应变能 V_e 与外力势能 V 之和

$$E_p=V_g+V。$$

②应变能

应变能 V_g 按材料力学有关公式计算。

③外力势能

外力势能等于外力所作虚功的负值，即

$$V=-\sum_{i=1}^{n}F_i\Delta_i$$

式中，F_i 为结构上的外力；Δ_i 为在虚位移中与外力 F_i 相应的位移。

3．稳定方程

（1）建立方法

对于有限自由度结构，所有可能的位移状态只用有限个独立参数 a_1，a_2，…，a_n 表示，结构的势能 Ep 可认为只是有限个独立参数的函数，因而应用势能驻值原理时，只需使用普通的微分计算即可求解。

（2）两类情形

（1）单自由度结构

①势能的变分

对于单自由度结构，势能 E_p 只是参数 a_1 的一元函数，当 a_1 有一任意微小增量 δa_1（称为位移的变分）时，势能的变分为

$$\delta E_p = \frac{dE_p}{da_1}\delta a_1$$

②稳定方程

当结构处于平衡时，应有 $\delta E_p=0$，而由于 δa_1 是任意的，要使势能的变分 δE_p 等于零，即势能为驻值，只有

$$\frac{dE_p}{da_1}=0$$

由该式即可建立稳定方程以求解临界荷载。

（2）多自由度结构

①势能的变分

$$\delta E_p = \frac{\partial E_p}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial E_p}{\partial a_2}\delta a_2 + \cdots + \frac{\partial E_p}{\partial a_n}\delta a_n$$

②稳定方程

由 $\delta E_p=0$ 及 δa_1，δa_2，…，δa_n 的任意性，有

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial a_1}&=0 \\ \frac{\partial E_p}{\partial a_2}&=0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial E_p}{\partial a_n}&=0 \end{aligned}\right\}$$

由此可获得一组含 a_1，a_2，…，a_n 的齐次线性代数方程，要使 a_1，a_2，…，a_n 不全为零，则此方程组的系数行列式应等于零，据此即可建立稳定方程，从而确定临界荷载。

五、变截面压杆的稳定

1．阶形杆

图 13-1-6（a）所示为一阶形直杆，下端固定上端自由，上部刚度为 EI_1，下部为 EI_2。

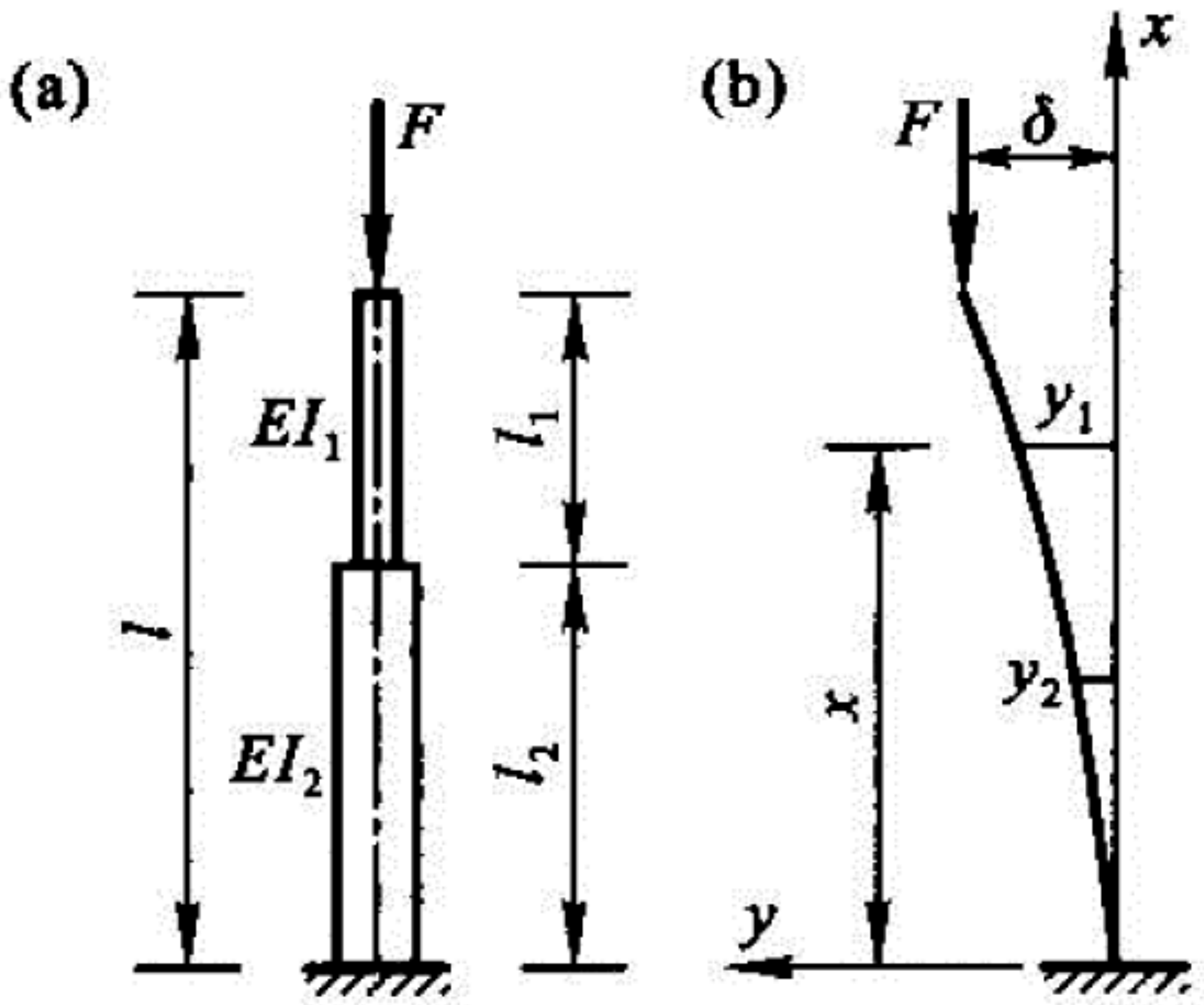


图 13-1-6

（1）平衡微分方程

若以 y_1、y_2 分别表示压杆失稳时上、下两部分的挠度（图 13-1-6（b）），则两部分的平衡微分方程分别为

$$EI_1 y_1'' = F(\delta - y_1)$$
$$EI_2 y_2'' = F(\delta - y_2)$$

（2）通解

$$y_1 = A_1\cos n_1 x + B_1\sin n_1 x + \delta$$
$$y_2 = A_2\cos n_2 x + B_2\sin n_2 x + \delta$$

式中

$$n_1 = \sqrt{\frac{F}{EI_1}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{F}{EI_2}}$$

（3）边界条件

①当 $x=0$ 时，$y_2=0$。

②当 $x=0$ 时，$y_2'=0$。

③当 $x=l$ 时，$y_1=\delta$。

④当 $x=l_2$ 时，$y_1=y_2$。

⑤当 $x=l_2$ 时，$y_1'=y_2'$。

（4）齐次方程组

$$\begin{cases} A_1\cos n_1 l + B_1\sin n_1 l = 0 \\ A_1\cos n_1 l_2 + B_1\sin n_1 l_2 + \delta\cos n_2 l_2 = 0 \\ A_1 n_1\sin n_1 l_2 - B_1 n_1\cos n_1 l_2 + \delta n_2\sin n_2 l_2 = 0 \end{cases}$$

（5）稳定方程

$$\begin{vmatrix} \cos n_1 l & \sin n_1 l & 0 \\ \cos n_1 l_2 & \sin n_1 l_2 & \cos n_2 l_2 \\ \sin n_1 l_2 & -\cos n_1 l_2 & \frac{n_2}{n_1}\sin n_2 l_2 \end{vmatrix} = 0$$

展开并整理得

$$\tan n_1 l_1 \cdot \tan n_2 l_2 = \frac{n_1}{n_2}$$

上式只有给出比值$\frac{I_1}{I_2}$和$\frac{l_1}{l_2}$时才能求解。

（6）其它情形

对于在柱顶承受 F_1 而且在截面突变处承受 F_2 作用的情形，其稳定方程为

$$\tan n_1 l_1 \cdot \tan n_2 l_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{F_1 + F_2}{F_1}$$

式中

$$n_1 = \sqrt{\frac{F_1}{EI_1}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{F_1 + F_2}{EI_2}}$$

只有当比值$\frac{I_1}{I_2}$、$\frac{l_1}{l_2}$和$\frac{F_1}{F_2}$均给出时才能求解。

2．截面惯性矩按幂函数连续变化的压杆

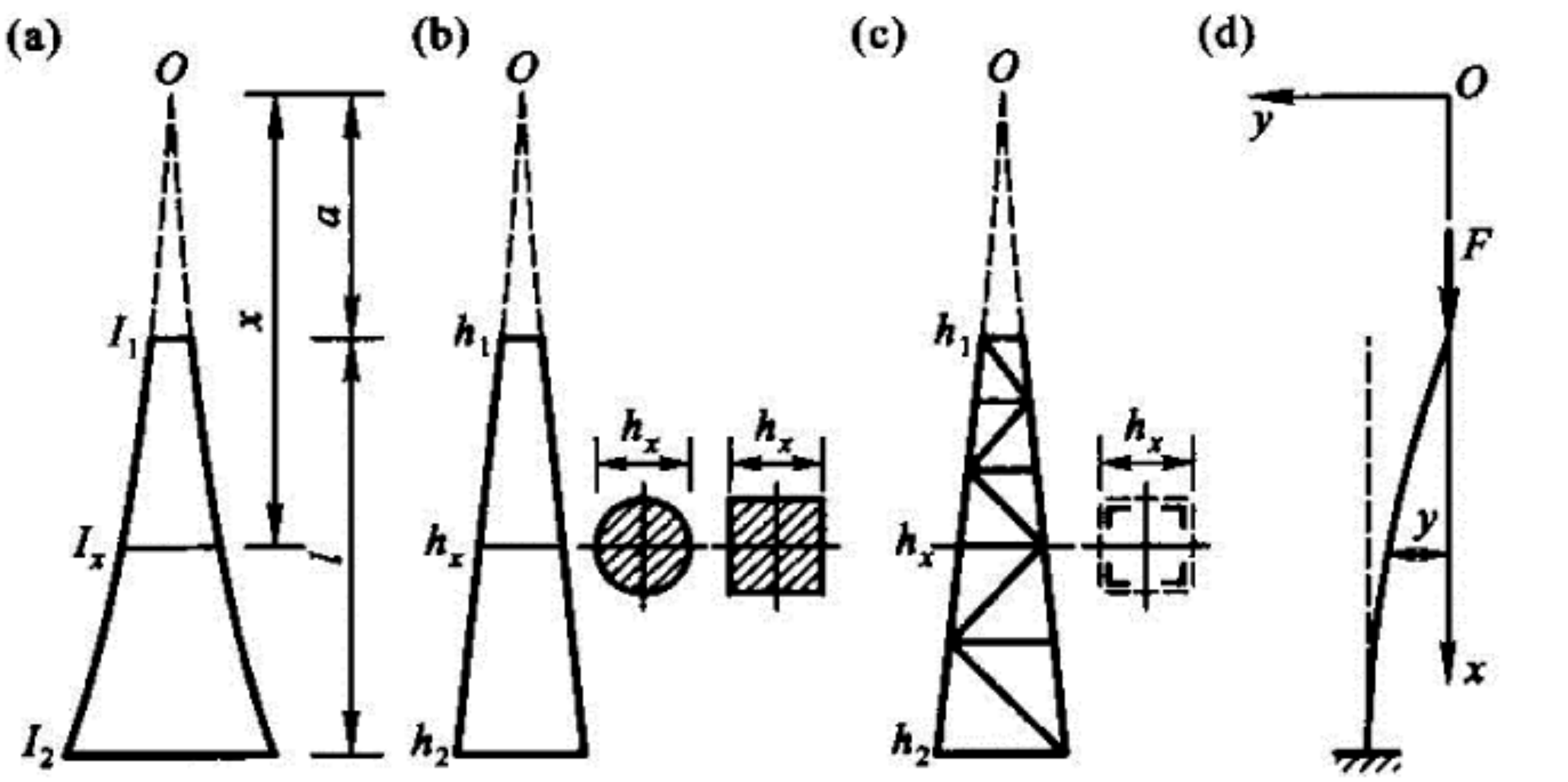


图 13-1-7

（1）概述

①变化规律

如图 13-1-7（a）所示，其任一截面的惯性矩为

$$I_x = I_1 \left(\frac{x}{a} \right)^m \tag{13-6}$$

式中，I_1 为柱顶截面惯性矩；a 与 x 为从相当于截面为零的 O 点处量出的距离；指数 m 为常数。

②m 值的确定

m 值不同，构件的形状也不同，常用的由以下两种

a．如图 13-1-7（b），具有直线外形的圆形截面或正方形截面的实心压杆为 m＝4；

b．如图 13-1-7（c）所示，具有直线外形而由四个截面不变的角钢组成的组合压杆，若略去角钢对本身形心轴的惯性矩，则其 m＝2。

③a 值的确定

a．一般计算

若柱底截面惯性矩为 I_2，则由

$$I_2 = I_1 \left(\frac{a + l}{a} \right)^m$$

有

$$a=\frac{l}{e^{\frac{1}{m}\ln(I_2/I_1)}-1} \tag{13-7}$$

若已知比值$\frac{I_2}{I_1}$及 m。则可由上式确定 a。

b．简化计算

对于 m＝2 和 m＝4 的情形，式（13-7）均简化为

$$a=\frac{l}{\frac{h_2}{h_1}-1}$$

式中，h_1、h_2 分别为柱顶、柱底截面的高度。

（2）两种情况

对于图 13-1-7（d）所示下端固定上端自由的压杆

①m＝2 的情况

a．微分方程

$$EI_1\left(\frac{x}{a}\right)^2y''=-Fy$$

b．求解

$$y=\sqrt{x}\left[A\sin\left(k\ln\frac{x}{a}\right)+B\cos\left(k\ln\frac{x}{a}\right)\right]$$

式中

$$k=\sqrt{\frac{Fa^2}{EI_1}-\frac{1}{4}} \tag{13-8}$$

c．边界条件

第一，当 x＝a 时，y＝0；

第二，当 x＝a＋l 时，y′＝0。

d．稳定方程

$$\tan(2k\ln\gamma)=2k \tag{13-9}$$

式中

$$\gamma=\sqrt{\frac{a}{a+l}}$$

若 γ 已知，则可由式（13-9）用试算法解出 k 的最小根，进而由式（13-8）求得临界荷载 F_{cr}。

②m＝4 的情况

a．微分方程

$$EI_1\left(\frac{x}{a}\right)^4y''+Fy=0$$

b．求解

$$y=x\left(A\cos\frac{\eta}{x}+B\sin\frac{\eta}{x}\right)$$

式中，$\eta^2=\frac{Fa^4}{EI_1}$。

c．边界条件

第一，当 x＝a 时，y＝0；

第二，当 x＝a＋l 时，y′＝0。
d．稳定方程

$$\tan\frac{\eta}{a+l}=\frac{\frac{\eta}{a+l}+\tan\frac{\eta}{a}}{1-\frac{\eta}{a+l}\tan\frac{\eta}{a}}$$

六、剪力对临界荷载的影响

1．挠曲线微分方程

如图 13-1-8 所示，其挠曲线微分方程为

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI}-\frac{k}{GA}\frac{d^2M}{dx^2}$$

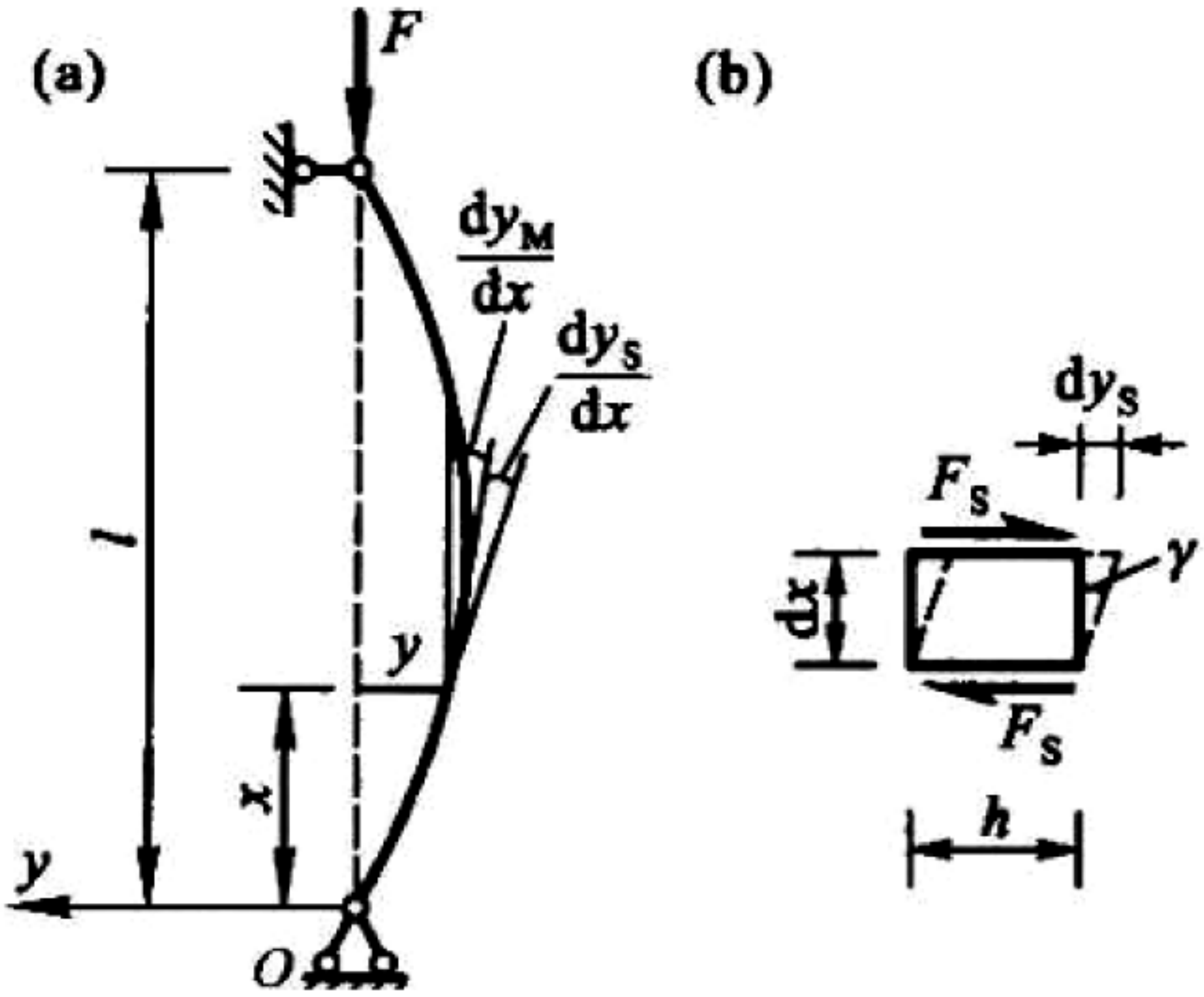


图 13-1-8

2．求解

（1）简化

$$EI\left(1-\frac{kF}{GA}\right)y''+Fy=0$$

令

$$m^2=\frac{F}{EI\left(1-\frac{kF}{GA}\right)} \qquad (13\text{-}10)$$

（2）通解

y＝Acosmx＋Bsinmx

（3）边界条件

①x＝0，y＝0；
②x＝l，y＝0。

（4）稳定方程

sin ml＝0

（5）方程的解

稳定方程的最小正根为 ml＝π，故由式（13-10）可得

$$F_{cr}=\frac{1}{1+\frac{k}{GA}\frac{\pi^2EI}{l^2}}\frac{\pi^2EI}{l^2}=\alpha F_E \tag{13-11}$$

式中，$F_E=\frac{\pi^2EI}{l^2}$为欧拉临界荷载；α 为修正系数，又可写为

$$\alpha=\frac{1}{1+\frac{k}{GA}\frac{\pi^2EI}{l^2}}=\frac{1}{1+\frac{kF_E}{GA}}=\frac{1}{1+\frac{k\sigma_E}{G}}$$

σ_E为欧拉临界应力。

在实体杆件中，剪力影响很小，通常可略去。

七、组合压杆的稳定

1．组合压杆的定义

组合压杆是指由两个型钢用若干联结件相联组成的结构。

2．联结件的形式

（1）缀条式（图 13-1-9（a））；

（2）缀板式（图 13-1-9（b））。

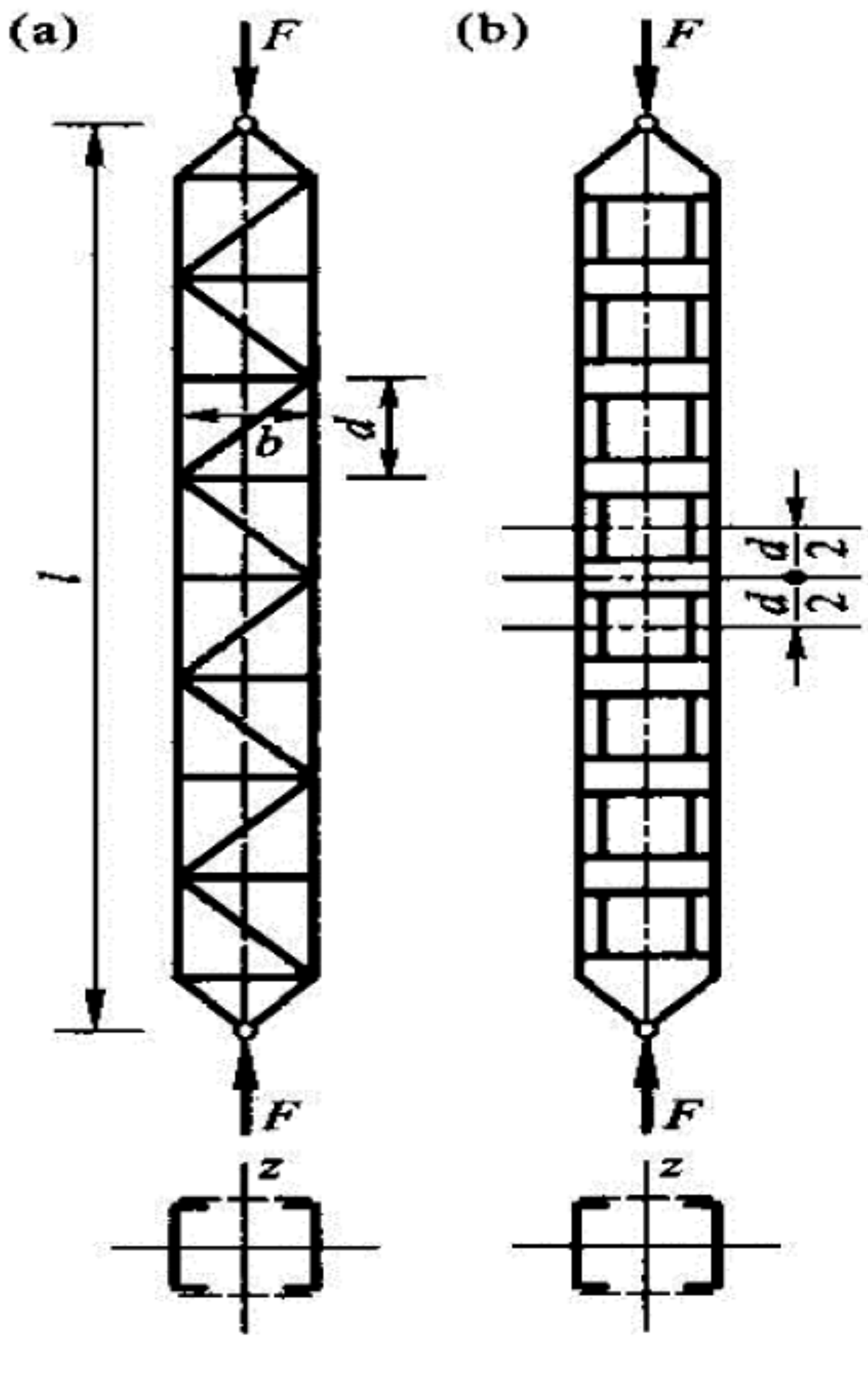


图 13-1-9

3．组合压杆临界载荷的计算

当组合压杆的节间数目较多时，其临界荷载可用实体压杆的公式（13-11）进行近似计算，而对式中的$\frac{k}{GA}$可用单位剪力作用下的剪切角$\bar{\gamma}$替换。

4．缀条式组合压杆

（1）缀条的特点

缀条通常采用单根角钢，与主要杆件即两个型钢相比，其截面较小，故其两端可视为铰结。

（2）剪切角的计算

现取出一个节间来考虑（图 13-1-10），在单位剪力$\overline{F}_S=1$作用下的剪切角为

$$\overline{\gamma}\approx\tan\overline{\gamma}=\frac{\delta_{11}}{d}$$

位移δ_{11}按下式计算

$$\delta_{11}=\sum\frac{\overline{F}_{N1}^2}{EA}l$$

由于主要杆件的截面比缀条的大得多，故在上式中可只考虑缀条的影响。于是有

$$\delta_{11}=\frac{d}{E}\left(\frac{1}{A_2\sin\alpha\cos^2\alpha}+\frac{1}{A_1\tan\alpha}\right)$$

因而

$$\overline{\gamma}=\frac{1}{E}\left(\frac{1}{A_2\sin\alpha\cos^2\alpha}+\frac{1}{A_1\tan\alpha}\right)$$

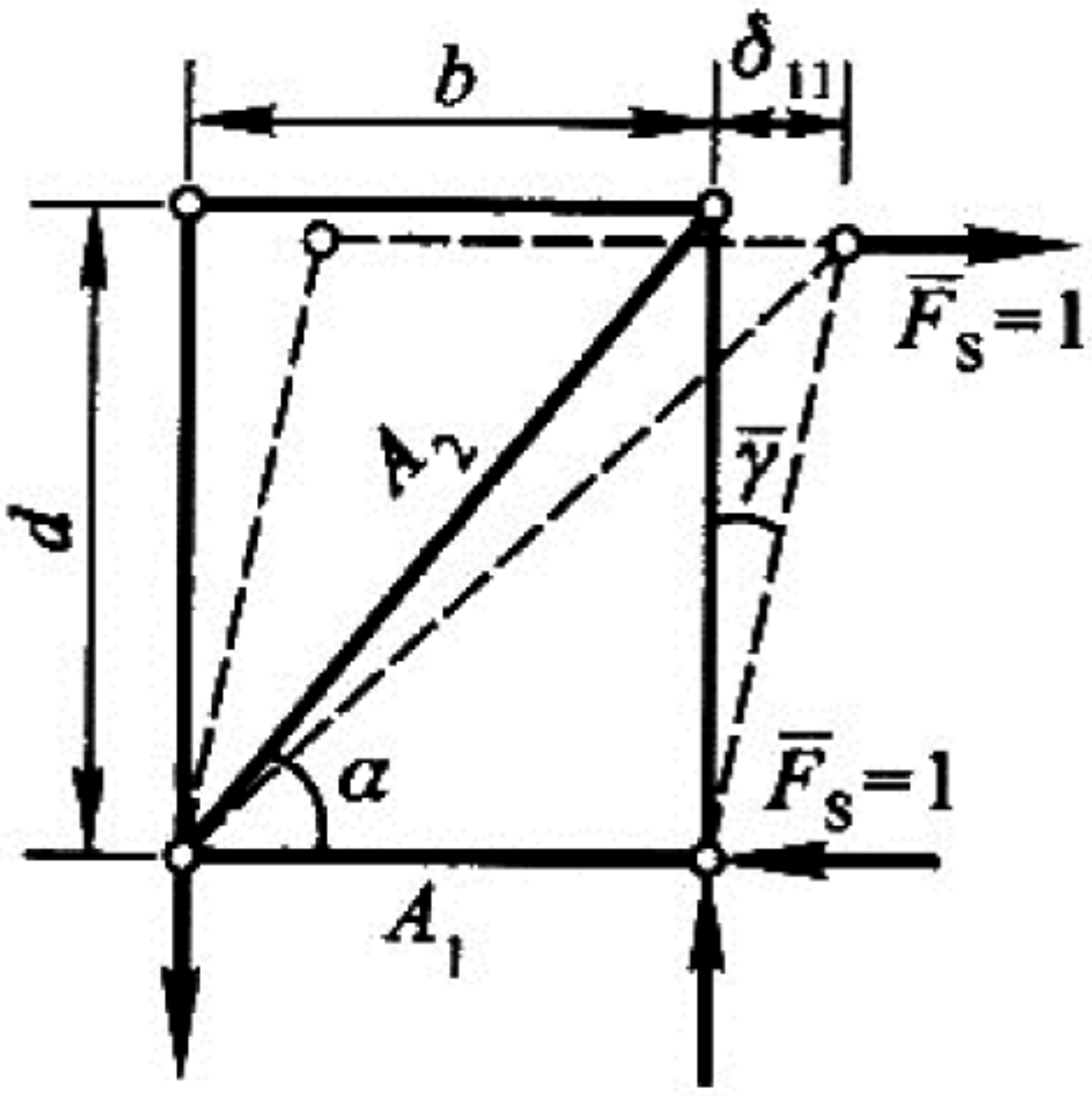


图 13-1-10

（3）临界载荷

①临界载荷一般表达式

将$\overline{\gamma}$代替式（13-11）中的$\frac{k}{GA}$，即得

$$F_{cr}=\frac{F_E}{1+\frac{F_E}{E}\left(\frac{1}{A_2\sin\alpha\cos^2\alpha}+\frac{1}{A_1\tan\alpha}\right)}=\alpha_1F_E \qquad (13\text{-}12)$$

若略去横杆影响，并考虑到在一般情况下型钢翼缘两侧平面内都设有缀条，则式（13-12）变成

$$F_{cr}=\frac{F_E}{1+\frac{F_E}{E}\frac{1}{2A_2\sin\alpha\cos^2\alpha}}$$

式中，A_2为一根斜杆的截面积。

②临界荷载写成欧拉问题的基本形式

$$F_{cr}=\frac{\pi^2EI}{(\mu l)^2}$$

式中，μ 为长度因数。

（4）惯性矩的计算

计算欧拉临界荷载 F_E 所用的惯性矩 I 为两根主要杆件的截面对整个截面的形心轴 z 的惯性矩，其具体计算表达式为

$$I \approx 2I' + \frac{1}{2}A'b^2$$

式中，A′ 为一根主要杆件的截面积；I′ 为一根主要杆件的截面对其本身形心轴的惯性矩，并近似认为其形心轴到 z 轴的距离为 $\frac{b}{2}$。

（5）长度因数

长细比

$$\bar{\lambda} = \frac{l}{i}$$

式中，i 为两主要杆件的截面对整个截面形心轴 z 的回转半径。

长度因数

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{27A'}{A_2\bar{\lambda}^2}}$$

（6）计算长细比 λ

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \mu\bar{\lambda} = \sqrt{\bar{\lambda}^2 + 27\frac{A'}{A_2}}$$

5．缀板式组合压杆

（1）缀板的特点

组合压杆采用缀板联结时，没有斜杆，缀板与主要杆件的联结应视作刚结。

（2）剪切角的计算

在确定 $\bar{\gamma}$ 时，可把组合杆件当作单跨多层刚架，并近似认为主要杆件的反弯点在节间中点，且剪力是平均分配于两主要杆件。于是，可取如图 13-1-11（a）所示部分来计算。

$$\delta_{11} = \sum\int\frac{\overline{M}_1^2\mathrm{d}s}{EI} = \frac{d^3}{24EI'} + \frac{bd^2}{12EI''}$$

因此剪切角为

$$\bar{\gamma} = \frac{\delta_{11}}{d} = \frac{d^2}{24EI'} + \frac{bd}{12EI''}$$

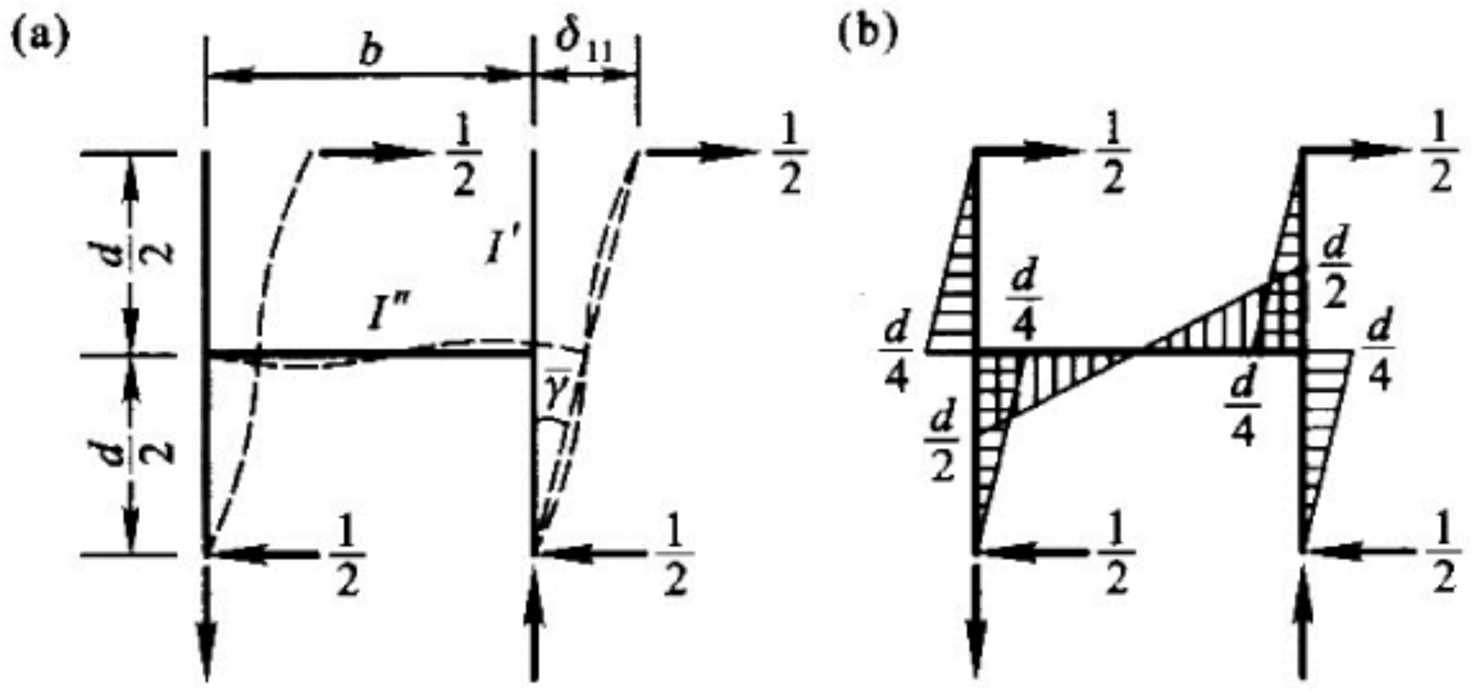


图 13-1-11

（3）临界载荷

用$\bar{\gamma}$上式代替式（13-11）中的$\frac{k}{GA}$即得

$$F_{cr}=\frac{F_E}{1+\left(\frac{d^2}{24EI'}+\frac{bd}{12EI''}\right)F_E}=\alpha_2 F_E \qquad (13\text{-}13)$$

由于缀板的刚度要比主要杆件的刚度大得多，可近似取 EI″=∞，于是式（13-13）可写成

$$F_{cr}=\frac{F_E}{1+F_E\frac{d^2}{24EI'}}=\frac{F_E}{1+\frac{\pi^2 d^2 I}{24l^2 I'}}$$

（4）长度因数

$$\mu=\sqrt{\frac{\bar{\lambda}^2+\lambda'^2}{\bar{\lambda}^2}}$$

式中，$\bar{\lambda}$为整个组合杆件的长细比；λ′ 为一根主要杆件在一个节间内的长细比。

$$\bar{\lambda}=\frac{l}{i},\quad \lambda'=\frac{d}{i'}$$

式中，i 为两主要杆件的截面对整个截面形心轴 z 的回转半径；i 为单个主要杆件截面的回转半径。

（5）计算长细比

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\mu\bar{\lambda}=\sqrt{\bar{\lambda}^2+\lambda'^2}$$

八、窄条梁的稳定

1．窄条梁的失稳形式

窄条梁当其荷载达到临界值时（此时梁截面上的压应力达到其临界值），将丧失平面弯曲形式的稳定性，梁将偏离原弯曲平面而同时发生斜弯曲和扭转。

2．微分方程

图 13-1-12（a）所示狭长矩形截面梁，梁在两端受到一对 xy 平面内的力偶 M 的作用。用 v 和 w 分别表示梁失稳时任一截面的形心发生的竖向位移和侧向水平位移，并以沿坐标轴正向者为正，用 θ 表示截面绕 x 轴的转角，并按右螺旋规则确定其正向，如图 13-1-12（b）、（c）所示。

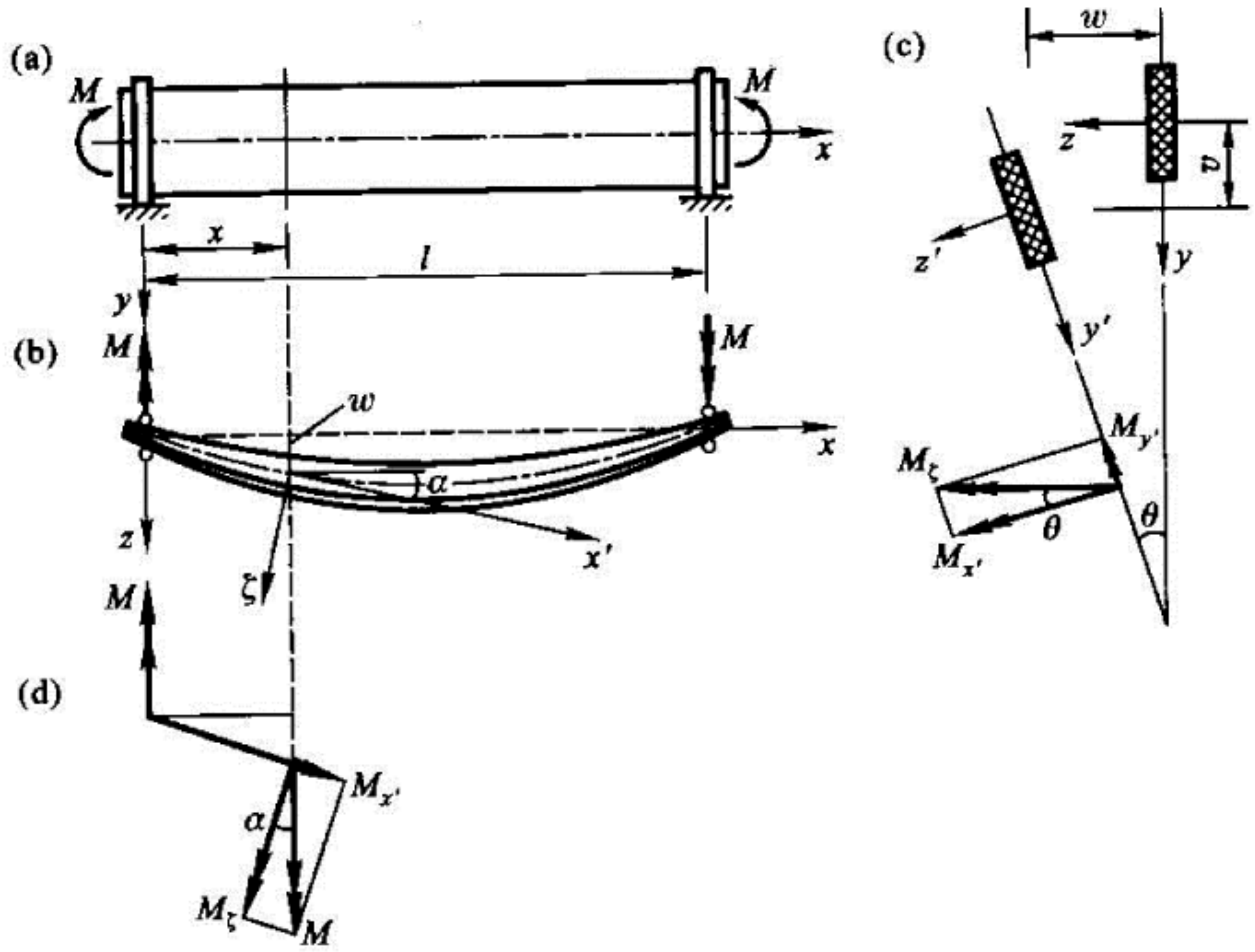


图 13-1-12

两个弯曲微分方程和一个扭转微分方程如下

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2v}{dx^2}&=-\frac{M}{EI_z}\\ \frac{d^2w}{dx^2}&=-\frac{M\theta}{EI_y}\\ GI_t\frac{d\theta}{dx}&=M\frac{dw}{dx}\end{aligned}\right\}\quad(13\text{-}14)$$

式中，GI_t 为截面抗扭刚度；I_t 为截面抗扭二次矩。

对于狭长矩形截面，I_t 可由下式计算

$$I_t=\frac{hb^3}{3}\left(1-0.630\frac{b}{h}\right)$$

式中，h 和 b 分别为矩形截面的高度和宽度。

3．临界载荷

（1）计算的微分方程

将式（13-14）中的第三式对 x 微分一次，再利用第二式消去$\frac{d^2w}{dx^2}$，即得

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{M^2}{EI_yGI_t}\theta=0$$

令

$$n^2=\frac{M^2}{EI_yGI_t}$$

则有

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}+n^2\theta=0$$

（2）通解

$$\theta=A\sin nx+B\cos nx$$

（3）边界条件

①当 $x=0$，$\theta=0$；

②当 $x=l$，$\theta=0$。

（4）稳定方程

$$\sin nl=0$$

（5）临界弯矩

稳定方程的最小正根为 $nl=\pi$，则临界弯矩为

$$M_{cr}=\frac{\pi EI_y}{l}\sqrt{\frac{GI_t}{EI_y}}$$

13.2 课后习题详解

复习思考题

1．第一类失稳和第二类失稳有何异同？

答：第一类失稳和第二类失稳的异同点：

（1）相同点

两类失稳的结果都是造成结构失去稳定性而破坏，分析这两种稳定的关键都是确定临界荷载。

（2）不同点

①两类失稳的特征不同。

第一类失稳的特征是：结构的平衡形式即内力和变形的状态发生质的改变，原有平衡形式成为不稳定的，同时出现新的有质的区别的平衡形式；而第二类失稳的特征是平衡形式并不发生质的改变，变形按原有的形式迅速增长，使结构丧失承载能力。

②问题的复杂程度不同。

第二类稳定问题的分析比第一类稳定问题的分析更复杂，第二类稳定问题的分析需要以第一类稳定问题的分析为基础。

2．试述静力法求临界荷载的原理和步骤，对于单自由度、有限自由度和无限自由度体系有什么不同？

答：（1）静力法求临界荷载的原理：

以结构失稳时平衡的二重性为依据，应用静力平衡条件，寻求结构在新的形式下能维持平衡的荷载，其最小值即为临界荷载。

（2）静力法求解临界荷载的步骤：

①假设结构已处于新的平衡形式，建立平衡方程；

②平衡方程为齐次方程，利用齐次方程有非零解的条件，建立特征方程；

③根据特征方程求解出临界荷载。

（3）静力法求临界荷载的原理和步骤，对于单自由度、有限自由度和无限自由度体系不同点：

①对于单、多自由度体系，所建立的平衡方程是齐次方程（一个、多个），由有非零解的条件，建立特征方程，为一次、多次代数方程，进而求解；

②对于无限自由度体系，所建立的平衡方程是齐次微分方程，由微分方程的解（连同边界条件）有非零解的条件，建立特征方程，一般为超越方程，通过试算法求解。

3．增大或减小杆端约束的刚度，对压杆的临界荷载数值有何影响？

答：增大或减小杆端约束的刚度会对压杆的计算长度产生影响：

①增大杆端约束刚度，则对压杆的计算长度减小，临界荷载值增大；

②减小杆端约束刚度，则对压杆的计算长度增大，临界荷载值减小。

4．怎样根据各种刚性支承压杆的临界荷载值来估计弹性支承压杆临界荷载值的范围？

答：弹性支承压杆的极限情况是刚性支承压杆。如弹性支座的刚度系数 k＝0，相当于无支座；刚度系数 k＝∞，相当于沿刚度方向固定。所以，根据刚性支承压杆的临界荷载值，可以估计弹性支承压杆临界值的范围，即弹性支承压杆的临界荷载小于刚性支承压杆的临界荷载。

5．在什么情况下刚架的稳定问题才宜于简化为一根弹性支承压杆的稳定问题？就图 13-2-1 两种情况进行讨论。对于图 13-2-1b 的情况若简化为一根弹性支承压杆，在确定弹簧刚度时会遇到什么困难？应怎样解决？

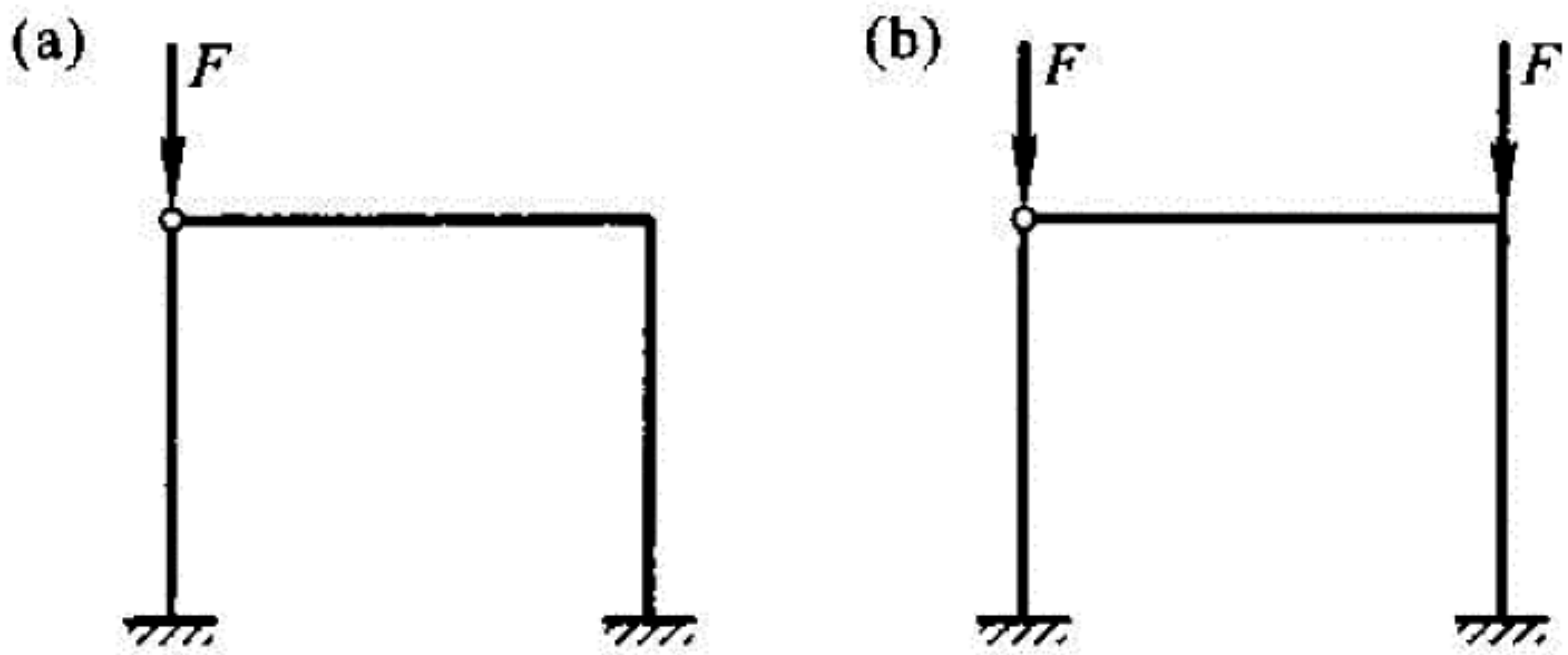


图 13-2-1

答：(1) 各弹性支座的弹簧刚度能较容易地单独确定时才宜于简化为一根弹性支承压杆的稳定问题。这通常具备两个条件：

①除所选的一根压杆外，其余用以组成弹性支座的各杆件中无压杆（含对称结构，正、反对称失稳取一半后无压杆），否则在计算弹簧刚度时将须考虑压杆上的纵向荷载影响，这使分析复杂（多为非线性函数）；

②当弹簧支座不止一个时，组成各弹性支座的杆件应互不重复，这样各弹性支座的弹簧刚度才便于单独确定，否则它们将相互影响而不能各自独立，处理较为复杂。

（2）13-2-1（b）简化为一根弹性支承压杆时，其它的杆件中有压杆。解决办法：首先求解该结构在右侧刚节点处的弯矩，将求解出的弯矩分解为关于结构正对称和反对称的荷载；再利用对称性取一半结构进行计算，这时只存在一根压杆，便可简化为一根弹性支承压杆。

6．试述能量法求临界荷载的原理和步骤。为什么能量法求得的临界荷载通常都是近似值，且总是大于精确值？

答：（1）能量法求临界荷载的原理：

以结构失稳时平衡的二重性为依据，应用以能量形式表示的平衡条件，寻求结构在新的形式下能维持平衡的荷载，其中最小者即为临界荷载。

（2）能量法求临界荷载的步骤：

①写出结构应变能和外力势能的表达式；

②总能量对独立的位移参量取变分为零，得到联立的方程组；

③令系数行列式为零得到稳定方程，求解稳定方程，其最小值即为临界荷载。

（3）因为所假设的挠曲线与真实曲线不相同，故相当于加入了某些约束，从而增大了压杆的抵抗失稳能力，使得所求临界荷载值比精确解大。

7．两铰拱和三铰拱在反对称失稳时的临界荷载值是否相同？为什么？

答：两铰拱和三铰拱在反对称失稳时的临界荷载值是相同的。

因为两铰拱和三铰拱在反对称失稳时的失稳形式相同，如图 13-2-2 所示。计算时均以圆弧形曲杆的弯曲平衡微分方程为基础，且对应的边界条件相同，故最后所求出的临界荷载值相等。

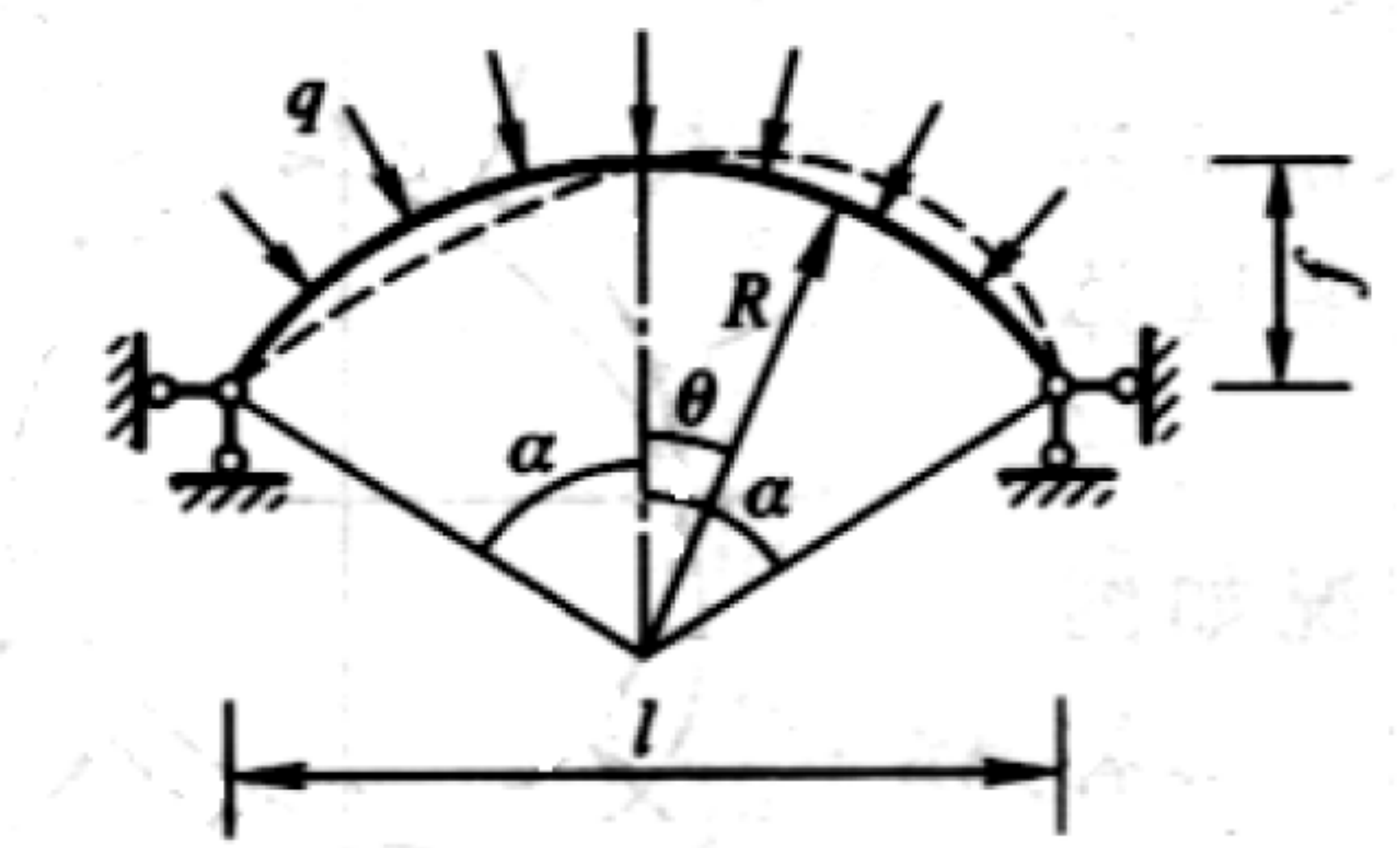


图 13-2-2

8．在两铰圆拱的临界荷载公式 $q_{cr}=\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2}-1\right)\frac{EI}{R^3}$ 中，当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，$q_{cr}=\frac{3EI}{R^3}$，与圆环临界荷载值相同；而当 α ＝π 时，反而得到 $q_{cr}=0$ 这怎样解释？

答：因为两铰圆拱的临界荷载公式 $q_{cr}=\left(\frac{\pi^2}{\alpha^2}-1\right)\frac{EI}{R^3}$ 适用条件是 $\alpha<\pi$，而当 $\alpha=\pi$ 时，该临界荷载公式不再适用，求出的结果为零是不成立的。

习题

13-1　图示结构各杆刚度均为无穷大，k 为抗移弹性支座的刚度（发生单位位移所需的力）。试用静力法确定

其临界荷载。

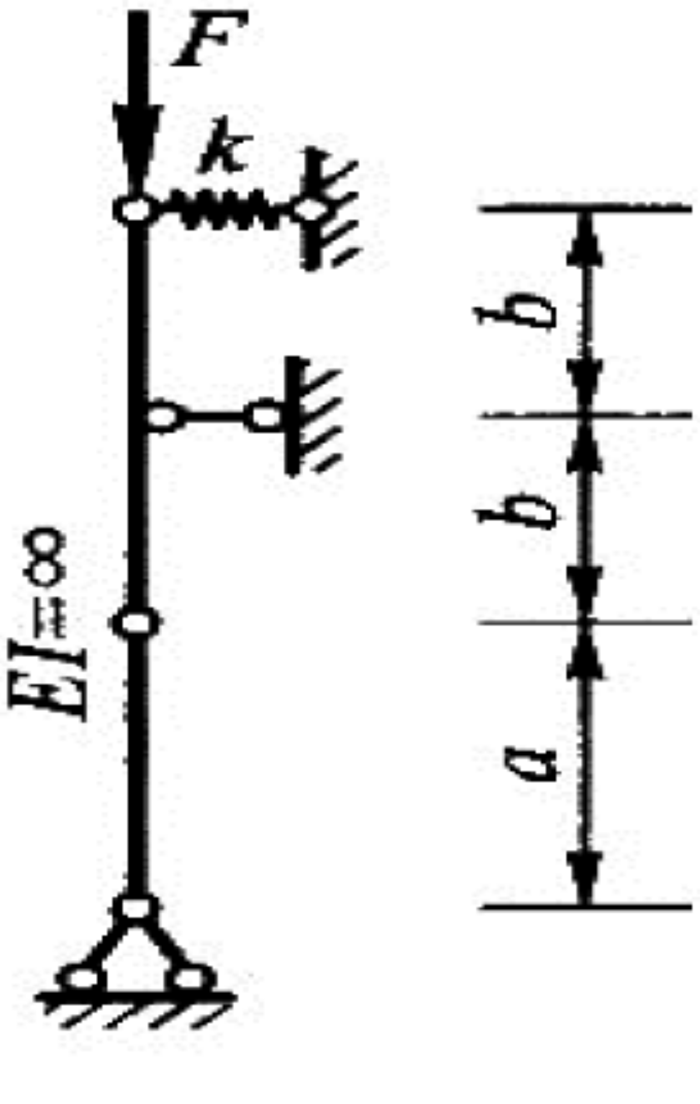


图 13-2-3（题 13-1）

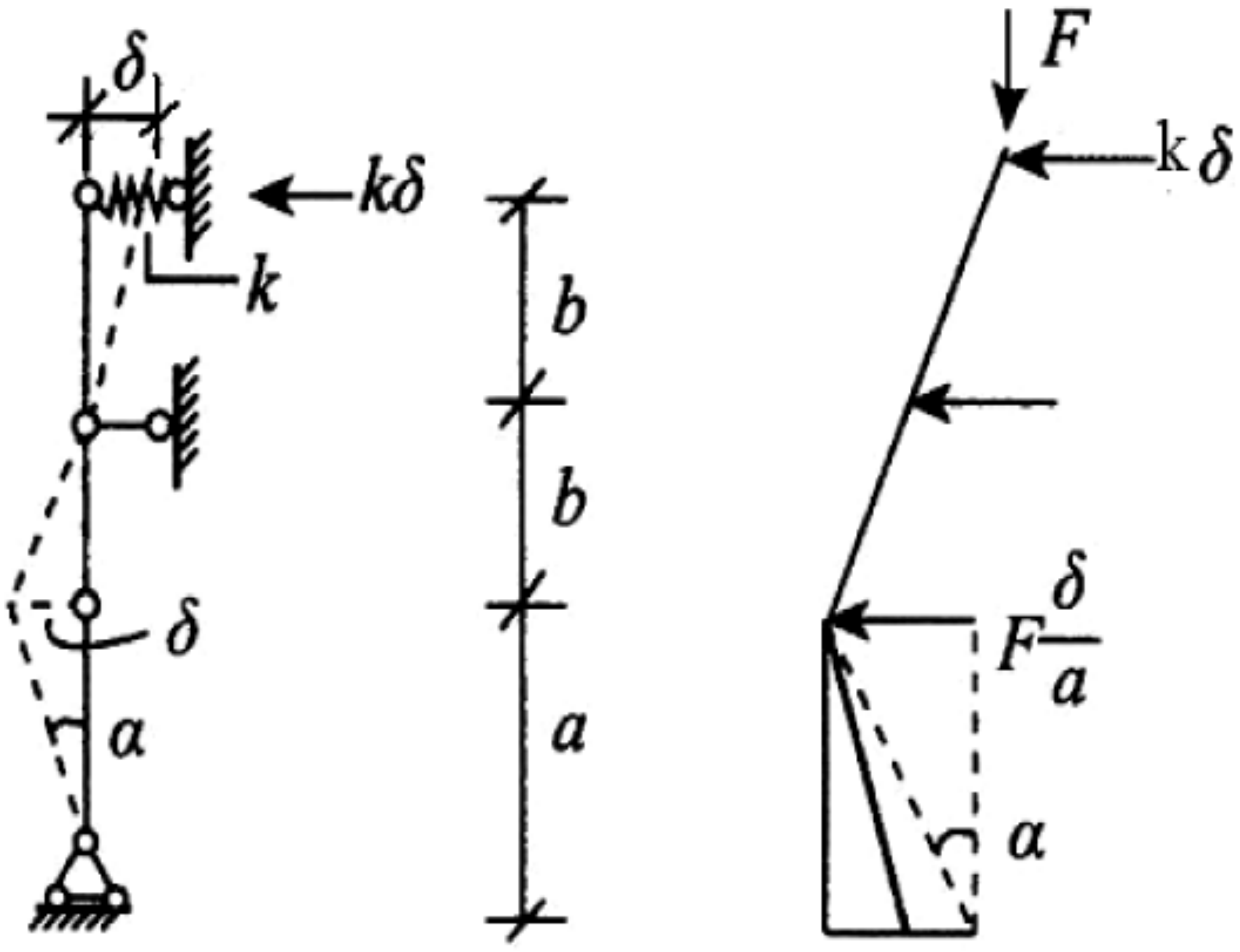


图 13-2-4

解：结构的变形图如图 13-2-4 所示。

取上段，由 $\sum M_0 = 0$，有

$$F\delta - k\delta b - F\delta + F \cdot \frac{\delta}{a} b = 0$$

解得临界荷载为

$$F_{cr} = \frac{bk}{2 + \frac{b}{a}} = \frac{ab}{2a+b}k$$

13-2　图示结构各杆刚度均为无穷大，k 为抗移弹性支座的刚度（发生单位位移所需的力）。试用静力法确定其临界荷载。

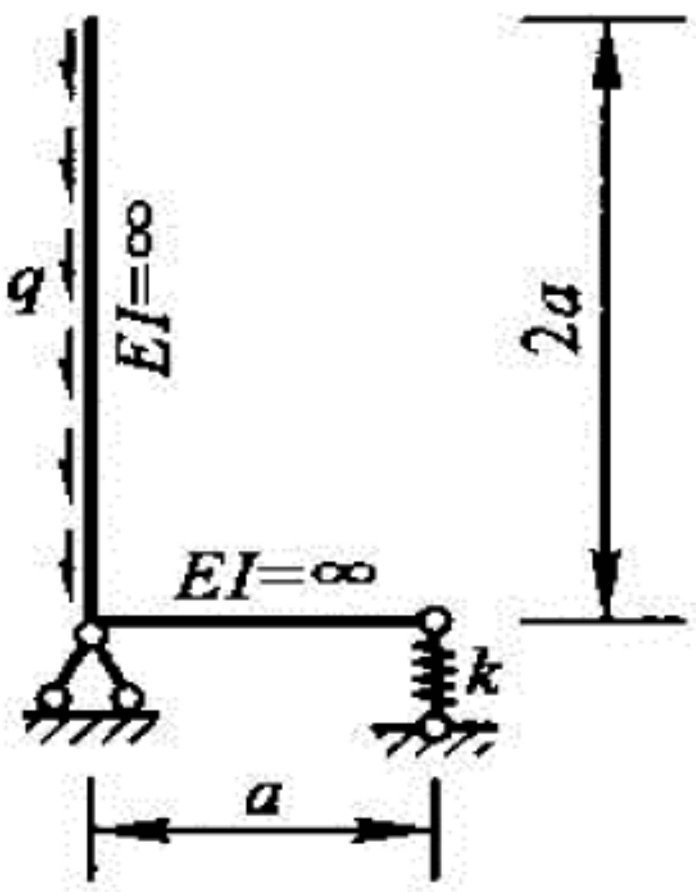


图 13-2-5（题 13-2）

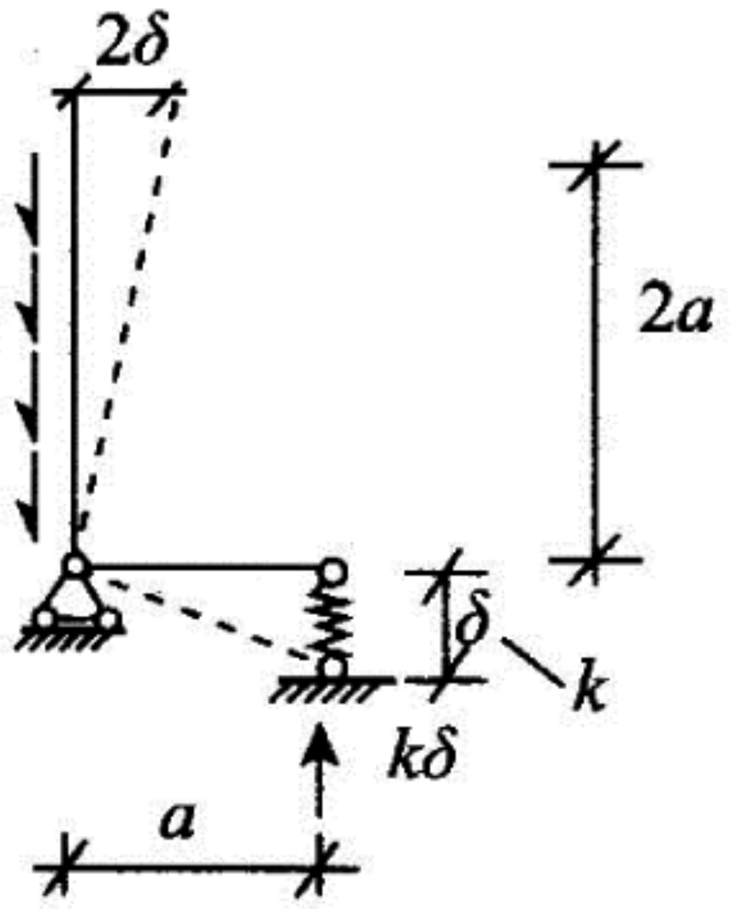


图 13-2-6

解：结构的变形图如图 13-2-6 所示。

则由 $\sum M_A = 0$，有

$$2qa\delta - k\delta a = 0$$

计算临界荷载为

$$q_{cr} = \frac{k}{2}$$

13-3　图示结构各杆刚度均为无穷大，k 为抗移弹性支座的刚度（发生单位位移所需的力）。试用静力法确定其临界荷载。

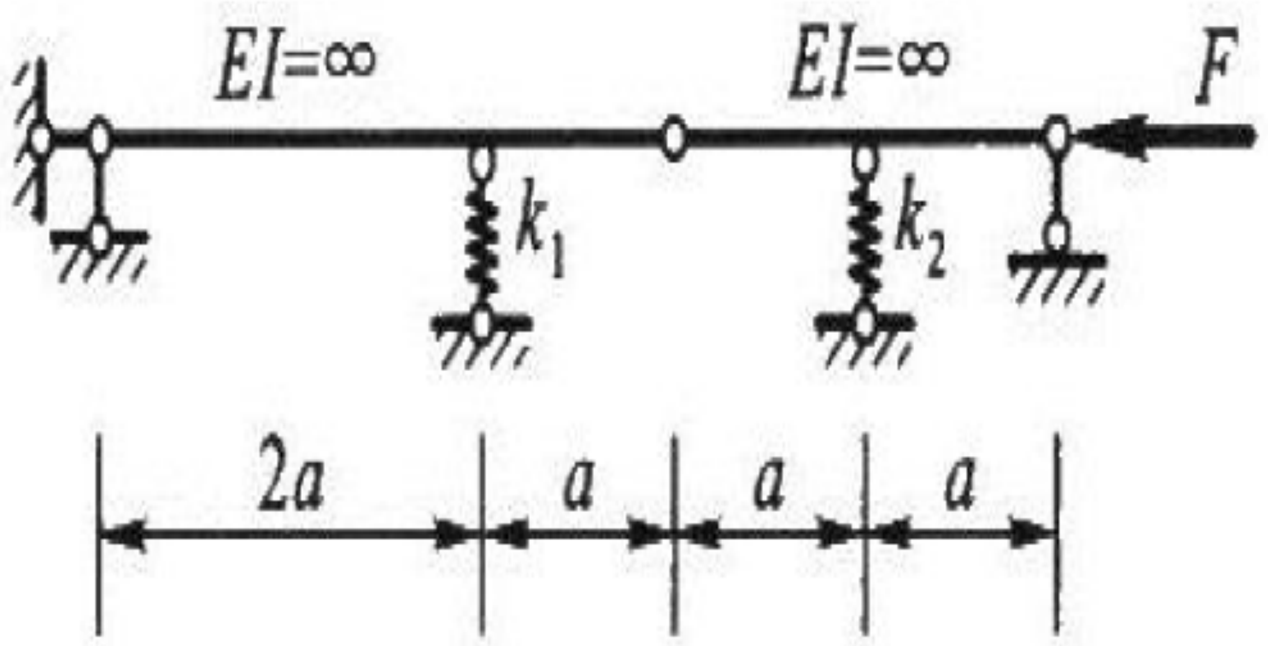


图 13-2-7（题 13-3）

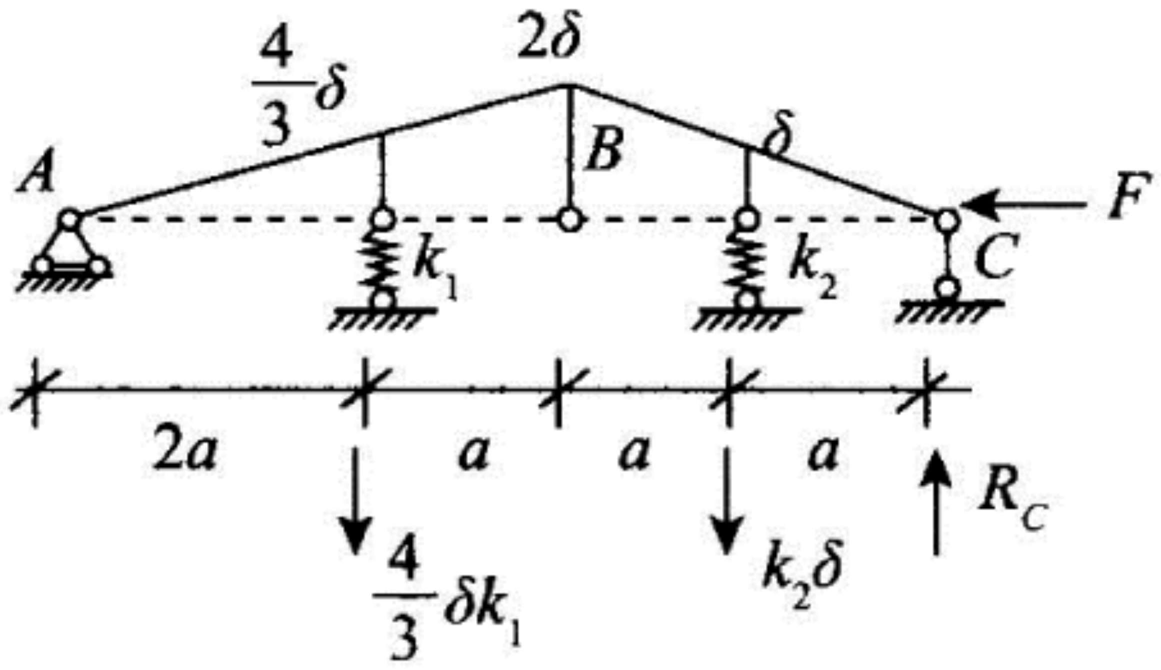


图 13-2-8

解：结构的变形图如图 13-2-8 所示，单自由度，只需设一个独立参数 δ，偏离后取 BC 为隔离体。则由 $\sum M_B=0$，有如下等式

$$F\times 2\delta - R_c\times 2a + \delta k_2 a = 0$$

解得 C 处反力为

$$R_c = F\cdot\frac{\delta}{a} + \frac{k_2\delta}{2}$$

再取整体，由 $\sum M_A=0$，有如下等式

$$\left(F\cdot\frac{\delta}{a}+\frac{k_2\delta}{2}\right)5a - \delta\cdot k_2\cdot 4a - \frac{4}{3}\delta k_1\times 2a = 0$$

解得临界荷载为

$$P_{cr} = \frac{8}{15}k_1 a + \frac{3}{10}k_2 a$$

13-4　图示结构各杆 EI=∞，弹性铰的抗转刚度（发生单位相对转角所需的力偶）为 k。试用静力法确定其临界荷载。

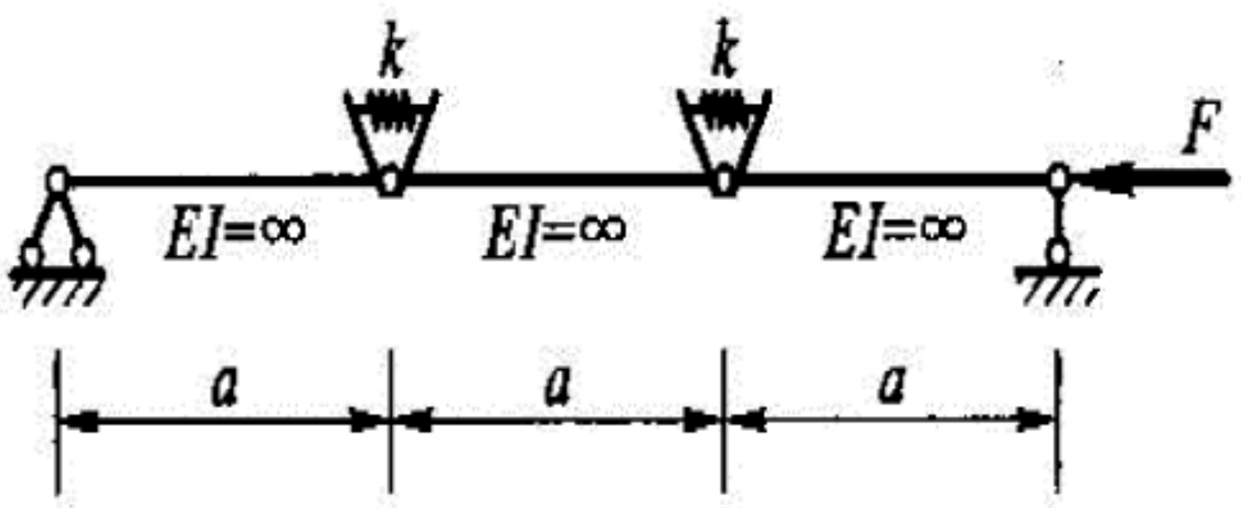


图 13-2-9（题 13-4）

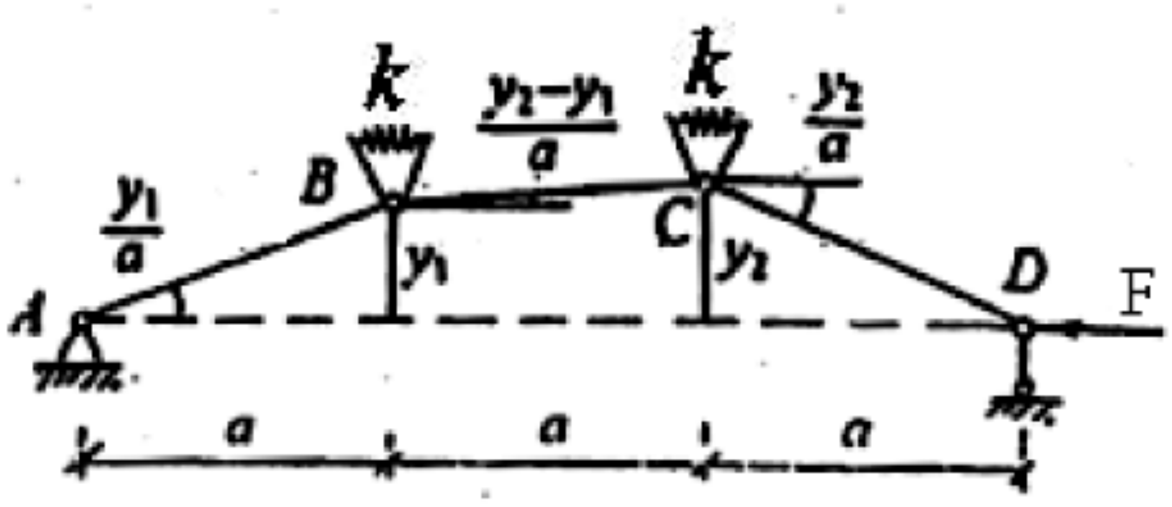


图 13-2-10

解：结构的变形图如图 13-2-10 所示，本题自由度为 2。

取 BD 为隔离体，由 $\sum M_B=0$，有

$$Fy_1 - k\left(\frac{y_1}{a}-\frac{y_2-y_1}{a}\right)=0$$

再取 CD 为隔离体，由 $\sum M_C=0$，有

$$Fy_2 - k\left(\frac{y_2}{a}+\frac{y_2-y_1}{a}\right)=0$$

即

$$\begin{cases}(F-2k/a)y_1+\dfrac{k}{a}y_2=0\\ \dfrac{k}{a}y_1+\left(F-\dfrac{2k}{a}\right)y_2=0\end{cases}$$

应有

$$\begin{vmatrix}F-\dfrac{2k}{a} & \dfrac{k}{a}\\ \dfrac{k}{a} & F-\dfrac{2k}{a}\end{vmatrix}=0$$

展开得

$$\left(F-\frac{2k}{a}\right)^2-\left(\frac{k}{a}\right)^2=0$$

解得临界荷载为

$$F=\frac{2k}{a}\pm\frac{k}{a}=\begin{cases}\dfrac{3k}{a} & 较大，不取，此时有\ y_1=-y_2\\ \dfrac{k}{a}=F_{cr} & 临界荷载，有\ y_1=y_2\end{cases}$$

故临界荷载为 $F_{cr}=\frac{k}{a}$，此时 $y_1=y_2$。

13-5　试用静力法求图示结构的稳定方程及临界荷载。

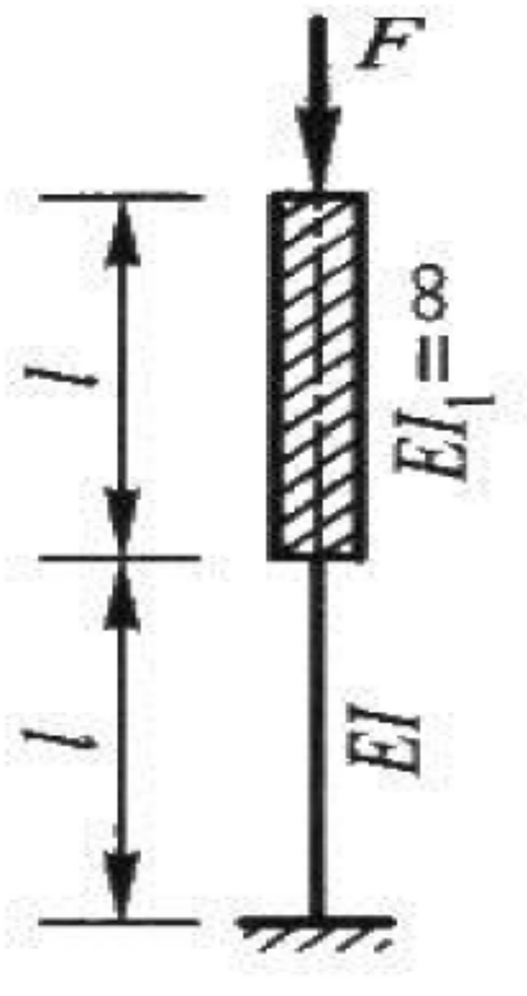


图 13-2-11（题 13-5）

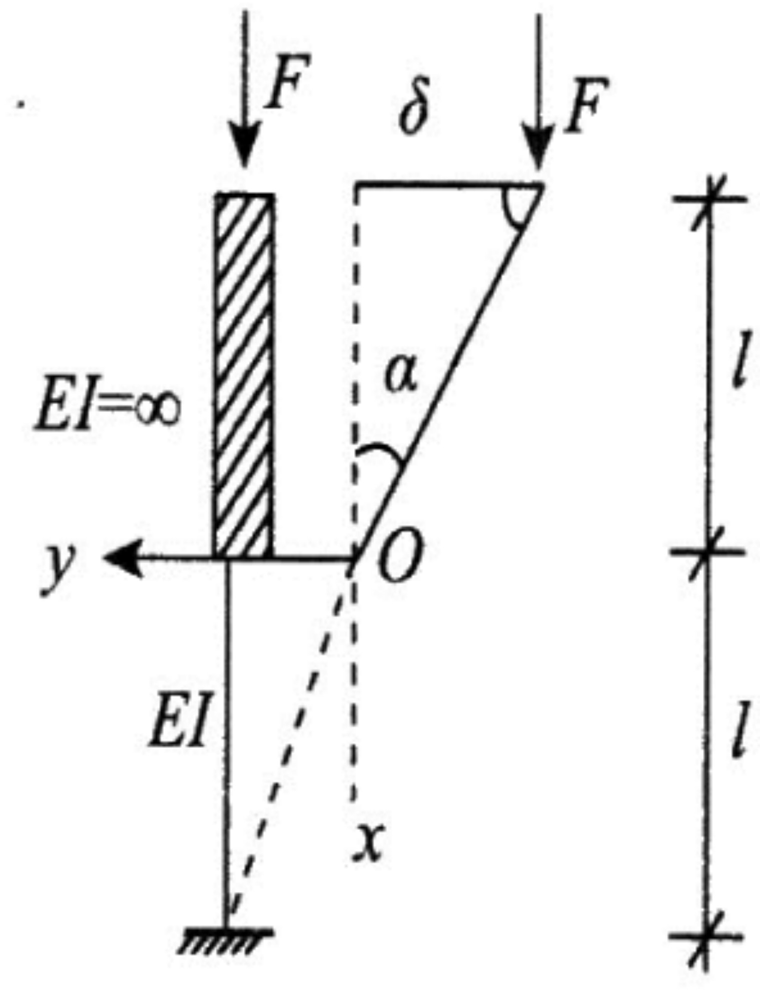


图 13-2-12

解：此题为无限自由度，取偏离后的杆中点为原点，如图 13-2-12 所示。

有如下关系式

$$EIy''=-F(y+\delta)(0\leqslant x\leqslant l)$$

$$EIy''+Fy=-F\delta$$

令 $n^2=\frac{F}{EI}$，则

$$y=A\cos nx+B\sin nx-\delta$$

边界条件有

x＝0，y＝0，得 A＝δ

$x=0$，$y'=\alpha=\dfrac{\delta}{l}$ ，得$B=\dfrac{\delta}{nl}$

x＝l，y′＝0，有 $-\delta n\sin nl+\dfrac{\delta}{nl}\cdot n\cos nl=0$

即 $\delta(-n\sin nl+\dfrac{1}{l}\cos nl)=0$

于是稳定方程为

$$\tan nl=\frac{1}{nl}$$

解得最小正根和临界荷载为

$$nl=0.8603, F_{cr}=\frac{0.7401EI}{l^2}$$

13-6　试用静力法求图示结构的稳定方程及临界荷载。

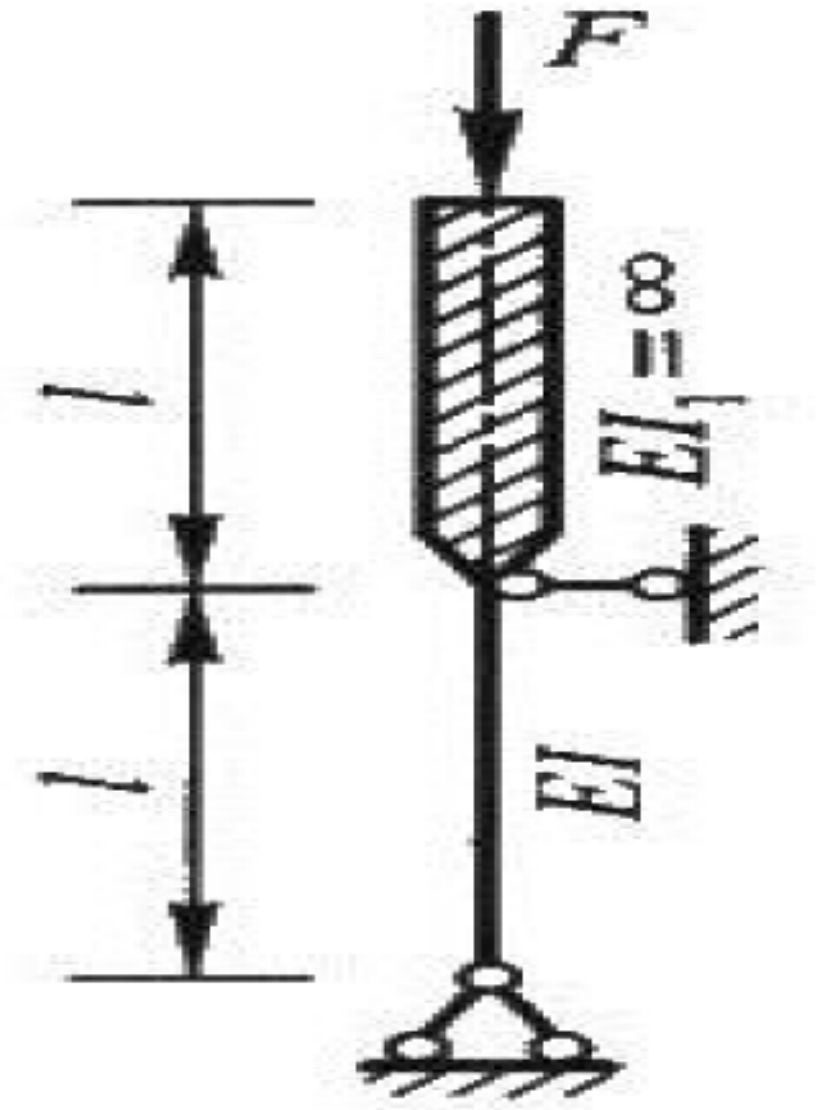


图 13-2-13（图 13-6）

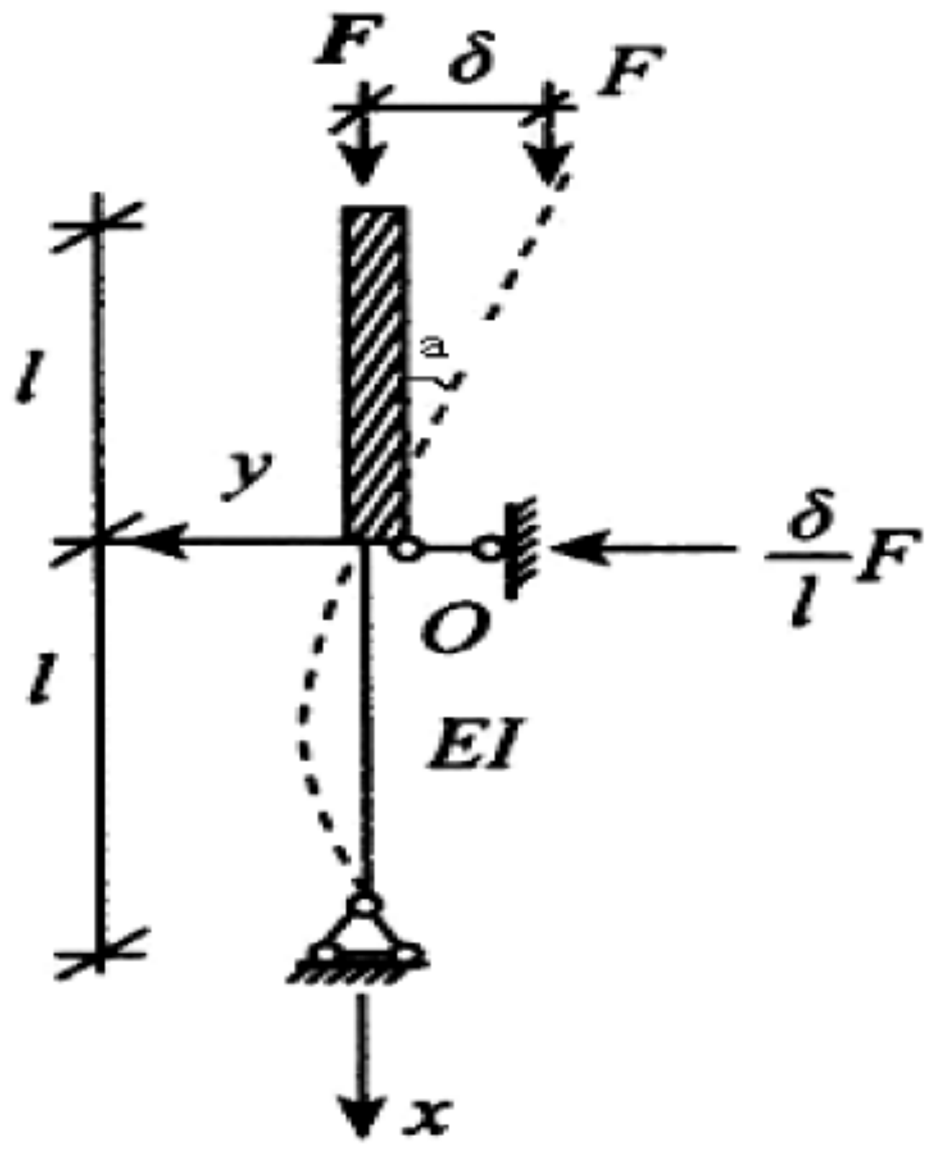


图 13-2-14

解：此题为无限自由度，取中点为原点，变形图如图 13-2-14 所示。

有如下关系式

$$EIy''+Fy=-F\delta+\frac{\delta}{l}Fx$$

令 $n^2=\dfrac{F}{EI}$，则

$$y=A\cos nx+B\sin nx-\delta+\frac{\delta}{l}x$$

边界条件有

x＝0，y＝0，得 A＝δ

$x=0, y'=\dfrac{\delta}{l}, nB+\dfrac{\delta}{l}=\dfrac{\delta}{l}$，得 B＝0

$x=l, y'=0, \delta\cos nl-\delta+\dfrac{\delta}{l}l=0$ 即 $\delta\cos nl=0$

于是稳定方程及最小正根为

$$\cos nl=0, (nl)_{\min}=\frac{\pi}{2}$$

则临界荷载为$F_{cr}=\dfrac{\pi^2EI}{4l^2}$ 。

13-7 试用静力法求图示结构的稳定方程及临界荷载。

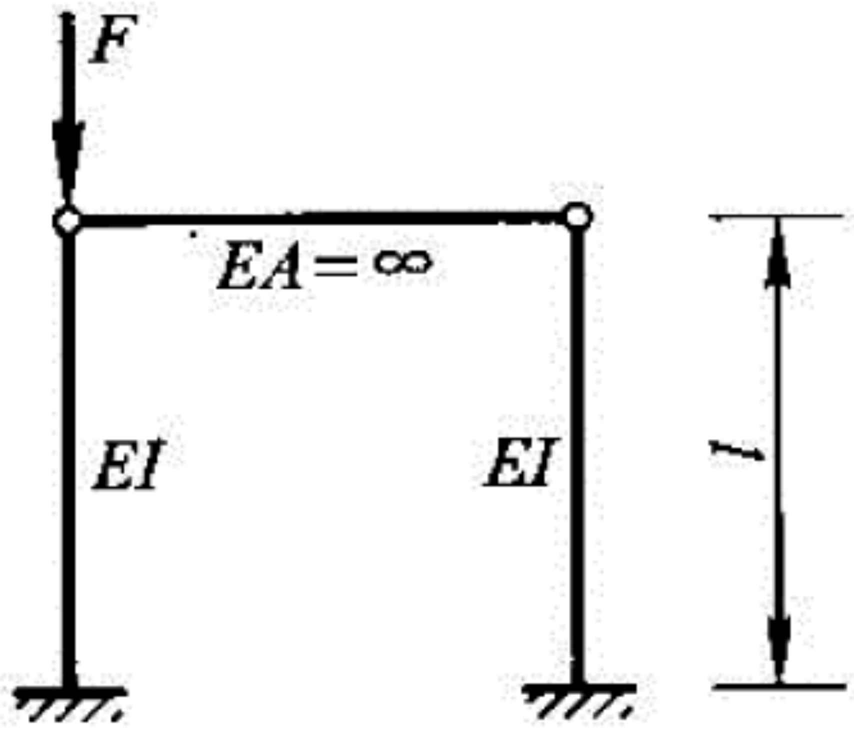


图 13-2-15（题 13-7）

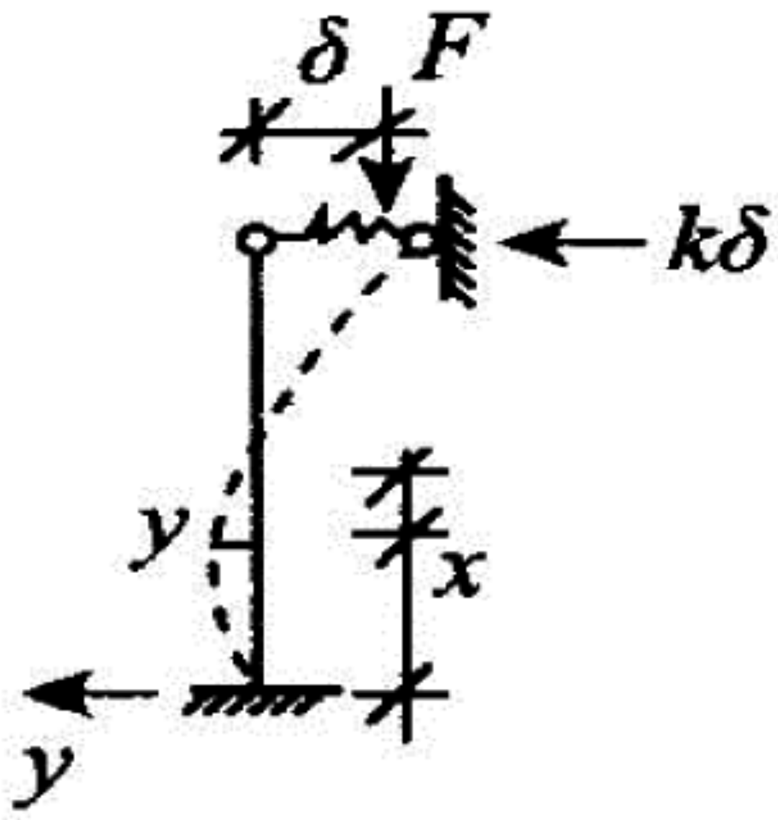


图 13-2-16

解：画出此结构变形图，如图 13-2-16 所示。

列出相关方程如下

$$EIy''=-F(y+\delta)+k\delta(l-x)$$

$$EIy''+Fy=k\delta(l-x)-F\delta$$

令$\frac{F}{k}=n^2$，则

$$y=A\cos nx+B\sin nx+\frac{B\delta}{F}(l-x)-\delta$$

边界条件有

$$x=0, y=0, A+\left(\frac{kl}{F}-1\right)\delta=0$$
$$x=0, y'=0, Bn-\frac{k}{F}\delta=0$$
$$x=l, y=-\delta, A\cos nl+B\sin nl=0$$

则

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{kl}{F}-1 \\ 0 & n & -\frac{k}{F} \\ \cos nl & \sin nl & 0 \end{vmatrix}=0$$

展开得

$$\frac{k}{F}\sin nl+n\left(1-\frac{kl}{F}\right)\cos nl=0$$

即

$$\tan nl=\frac{F}{k}n\left(\frac{kl}{F}-1\right)=\frac{n^2EI}{k}n\left(\frac{kl}{n^2EI}-1\right)=nl-\frac{n^3EI}{k}$$

将$k=\frac{3EI}{l^3}$代入有

$$\tan nl=nl-\frac{(nl)^3}{3}$$

最小正根为（可用计算求得）$nl=2.204$

得临界荷载为

$$F_{cr}=n^2EI=\frac{4.858EI}{l^2}$$

13-8　试用静力法求图示结构的稳定方程及临界荷载。

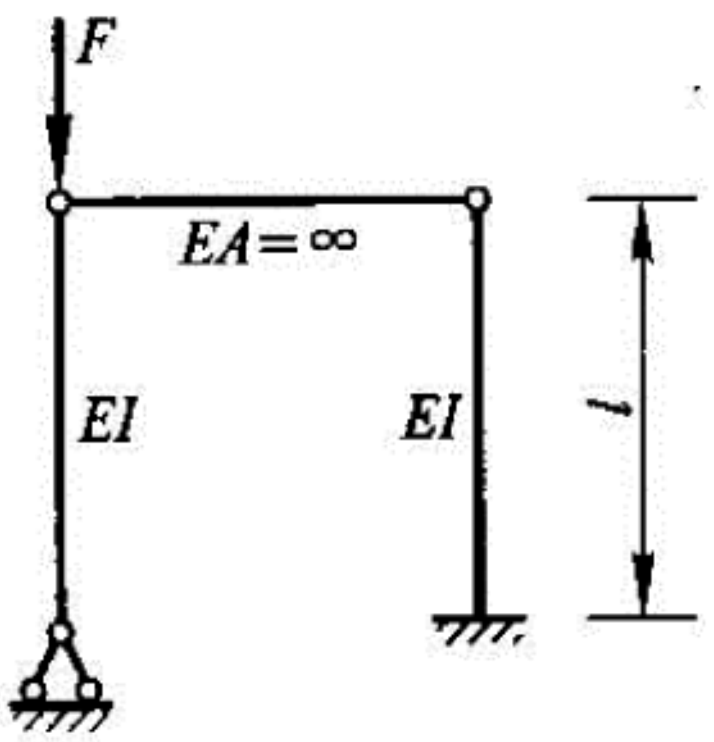


图 13-2-17（题 13-8）

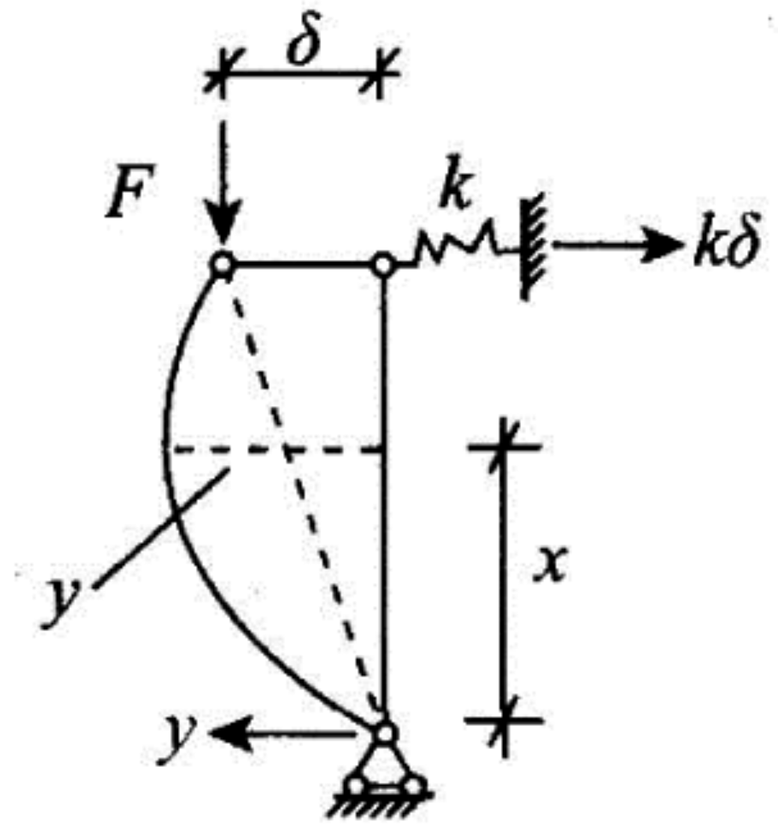


图 13-2-18

解：将此题简化为单根压杆，上端弹性支座刚度$k=\frac{3EI}{l^3}$，如图 13-2-18 所示。

假设失稳时上端偏离 δ，同时压杆弯曲，有如下关系式

$$EIy''=-F(y-\delta)-k\delta(l-x)$$

$$EIy''+Fy=F\delta-k\delta(l-x)$$

令 $n^2=\frac{F}{EI}$，则

$$y=A\cos nx+B\sin nx+\delta-\frac{k\delta}{F}(l-x) \tag{a}$$

边界条件 x=0，y″=0，有 A=0，则式（a）可写成

$$y=B\sin nx+\delta-\frac{k\delta}{F}(l-x) \tag{b}$$

当$x=0,y=0$时，代入式（b），则

$$\delta\left(1-\frac{kl}{F}\right)=0 \tag{c}$$

当 $x=l,y=\delta$时，代入式（b），则

$$B\sin nl=0 \tag{d}$$

应有

$$\begin{vmatrix} 1-\frac{kl}{F} & 0 \\ 0 & \sin nl \end{vmatrix}=0$$

展开得

$$\left(1-\frac{kl}{F}\right)\sin nl=0$$

此即稳定方程。

（1）当$\left(1-\frac{kl}{F}\right)=0$，有 $F_1=kl=\frac{3EI}{l^2}$

此时 $\sin nl = sin\sqrt{\frac{Fl}{EI}} \cdot l = \sin\sqrt{\frac{kl^3}{EI}} \neq 0$（即一般不等于零），故由（d）式应有 B=0

从而（b）式成为 $y = \delta - \frac{k\delta}{kl}(l-x) = \frac{\delta}{l}x$，压杆只偏离不弯曲。

（2）当 $\sin nl=0$，有 $(nl)_{\min} = \pi, F_2 = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

此时 $\left(1-\frac{kl}{F_2}\right) = 1 - \frac{kl^3}{\pi^2 EI} \neq 0$（即一般不等于零），故由式（c）应有 δ=0

从而式（b）成为 y=Bsinnx，压杆只弯曲不偏离。

（3）由于 $F_1 = \frac{3EI}{l^3} \prec F_2 = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$，取小者

故临界荷载为

$$F_{cr} = F_1 = \frac{3EI}{l^3}$$

此时压杆指偏不弯。

13-9　试用静力法求图示结构的稳定方程及临界荷载。

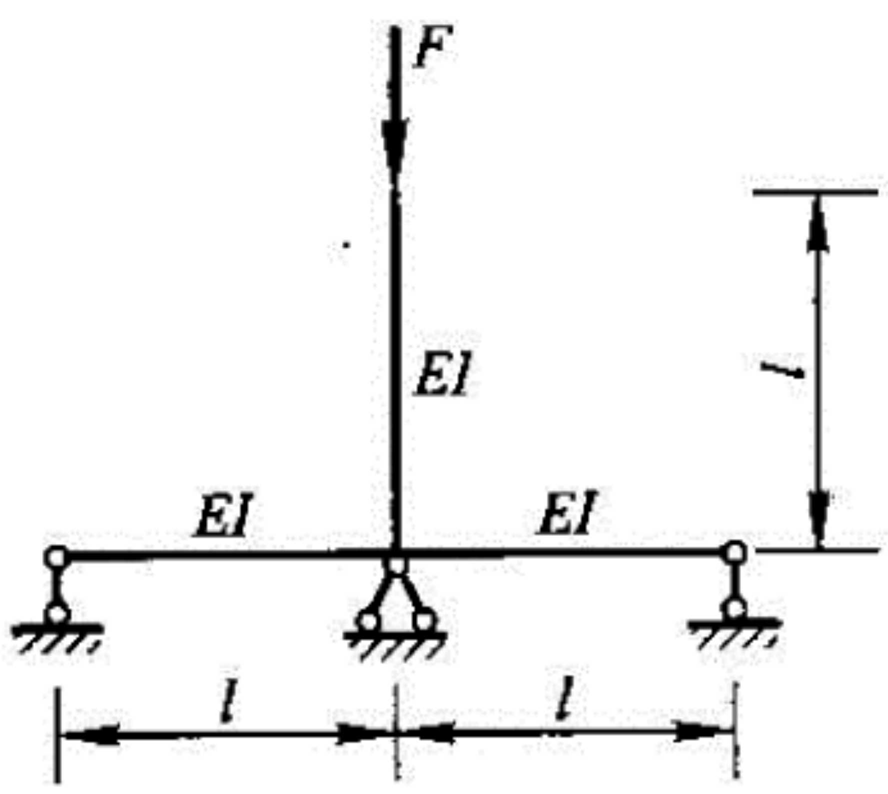


图 13-2-19（题 13-9）

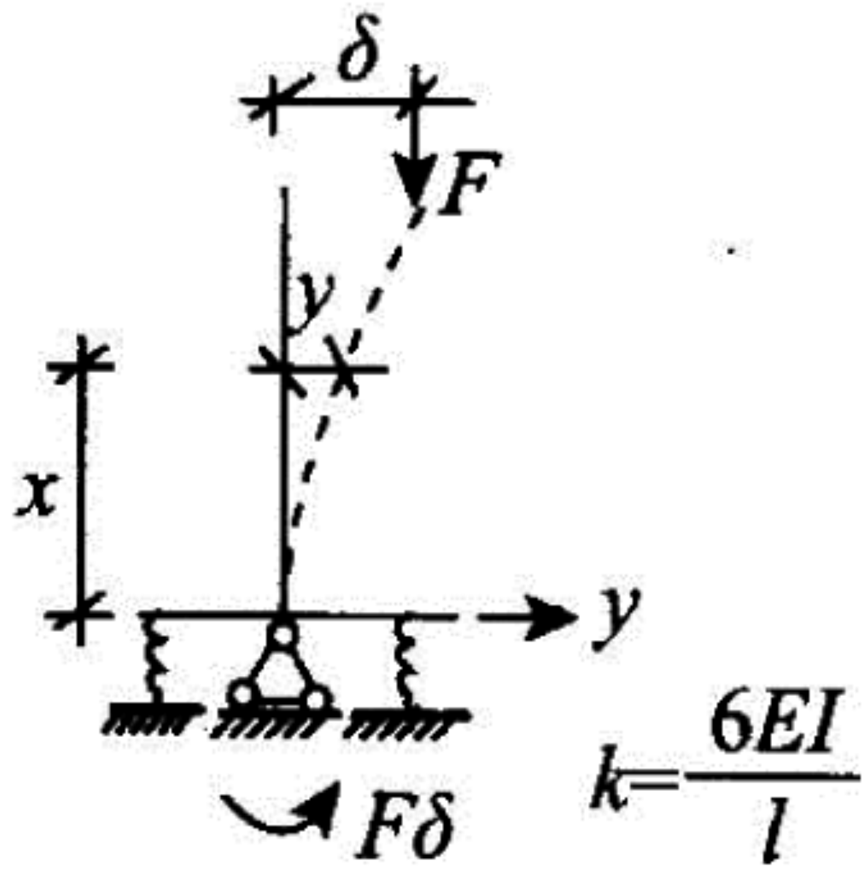


图 13-2-20

解：画出此结构变形图，如图 13-2-20 所示。

列出相关方程如下

$$EIy'' = F(\delta - y)$$

令 $n^2 = \frac{F}{EI}$，则

$$y = A\cos nx + B\sin nx + \delta$$

边界条件 x=0，y=0，得 A=-δ，则

$$y = -\delta\cos nx + B\sin nx + \delta$$

故对上式求导得

$$y' = n\delta\sin nx + nB\cos nx$$

$x=0, y'=\frac{F\delta}{k}$，得 $B=\frac{F\delta}{nk}$，则

$$y=-\delta\cos nx+\frac{F\delta}{nk}\sin nx+\delta$$

x＝l，y＝δ，则

$$-\delta\cos nl+\frac{F\delta}{nk}\sin nl=0$$

根据以上条件，列出稳定方程如下

$$\tan nl=\frac{nk}{F}=\frac{n\cdot\frac{6EI}{l}}{n^2EI}=\frac{6}{nl}$$

解得

$$(nl)_{max}=1.3496 \quad F_{cr}=n^2EI=\frac{1.8214EI}{l^2}$$

13-10　试用静力法求图示结构的稳定方程及临界荷载。

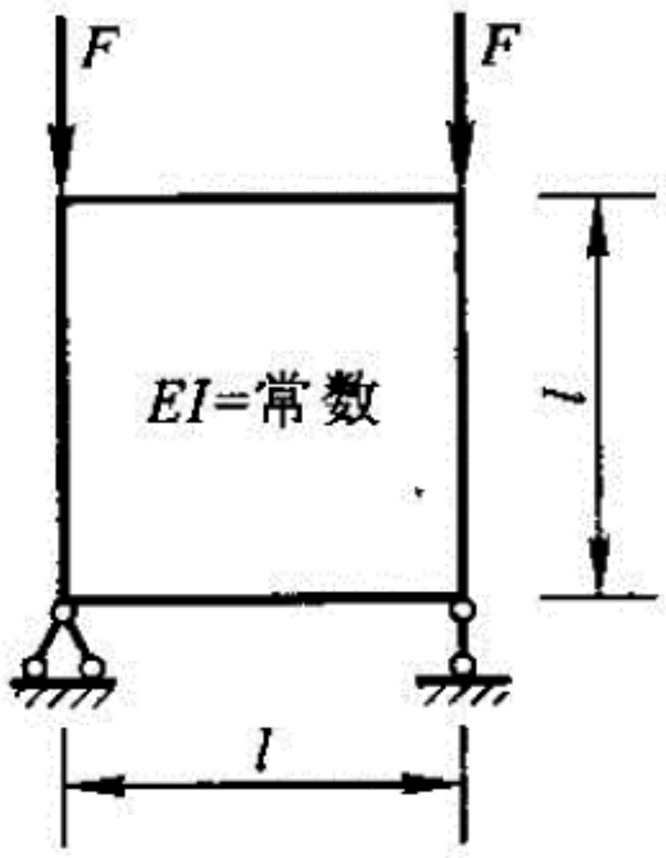


图 13-2-21（题 13-10）

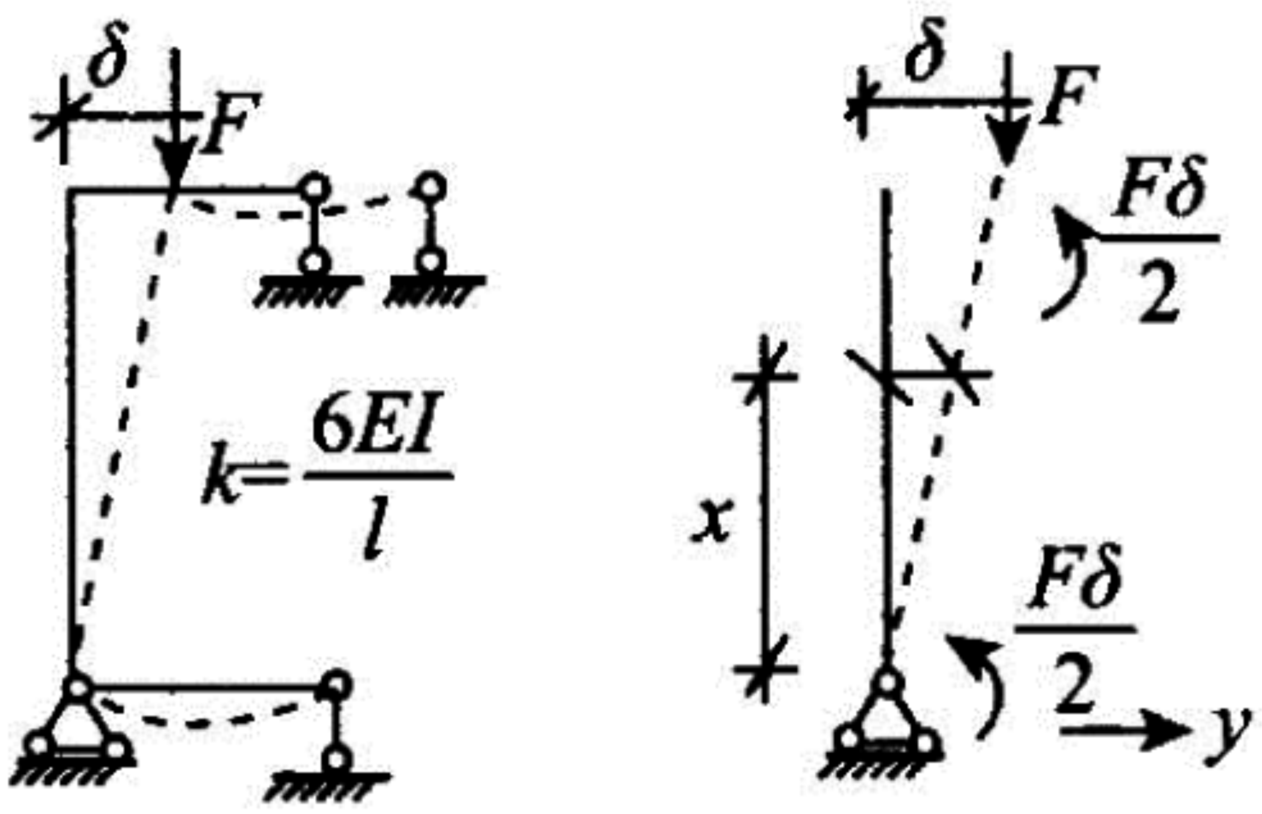


图 13-2-22

解：由判别可知，反对称失稳临界荷载较小，取一半并简化为单根压杆，上下抗转弹簧刚度为 $k=\frac{6EI}{l}$，变形图如图 13-2-22 所示。

解法 1：因上下变形反对称，故边弯矩各为$\frac{F\delta}{2}$，有

$$EIy''=F(\delta-y)-\frac{F\delta}{2}=-Fy+\frac{F\delta}{2}$$

令 $n^2=\frac{F}{EI}$，则

$$y=A\cos nx+B\sin nx+\frac{\delta}{2}$$

边界条件

$$x=0,\ y=0,\ 得A=-\frac{\delta}{2}$$

$$x=0, y'=\frac{F\delta}{2k},\ 得 B=\frac{F\delta}{2nk}$$

从而得到 y 的表达式如下

$$y=-\frac{\delta}{2}\cos nx+\frac{F\delta}{2nk}\sin nx+\frac{\delta}{2}$$

又有边界条件 x＝l，y＝δ，有如下关系式

$$-\frac{\delta}{2}\cos nl+\frac{F\delta}{2nk}\sin nl+\frac{\delta}{2}=\delta$$

$$1+\cos nl=\frac{F}{nk}\sin nl=\frac{nEI}{k}\sin nl$$

将$k=\frac{6EI}{l}$代入上式，可计算得到稳定性方程为

$$1+\cos nl=\frac{nl}{6}\sin nl$$

故临界荷载为

$$(nl)_{\min}=2.385,F_{cr}=n^2EI=\frac{5.688EI}{l^2}$$

解法 2：由于上下变形反对称，第三个边界条件改为

$$x=\frac{l}{2},y=\frac{\delta}{2}$$

有如下关系式

$$-\frac{\delta}{2}\cos\frac{nl}{2}+\frac{F\delta}{2nk}\sin\frac{nl}{2}+\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{2}$$

可计算得到临界荷载如下

$$\left(\frac{nl}{2}\right)\min=1.1925,\quad F_{cr}=n^2EI=\frac{5.688EI}{l^2}$$

13-11　试写出图示桥墩的稳定方程，失稳时基础当作绕 D 点转动，地基的抗转刚度为 k。

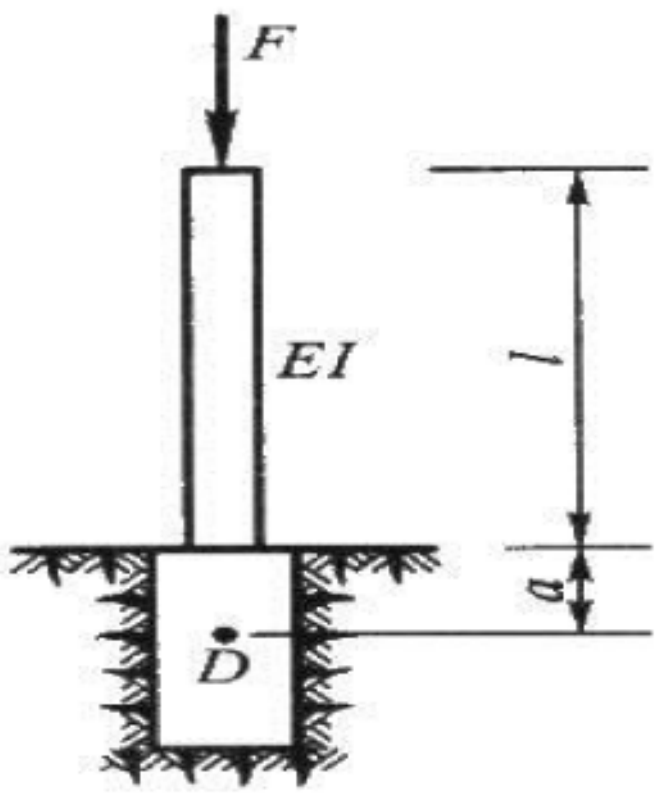


图 13-2-23（题 13-11）

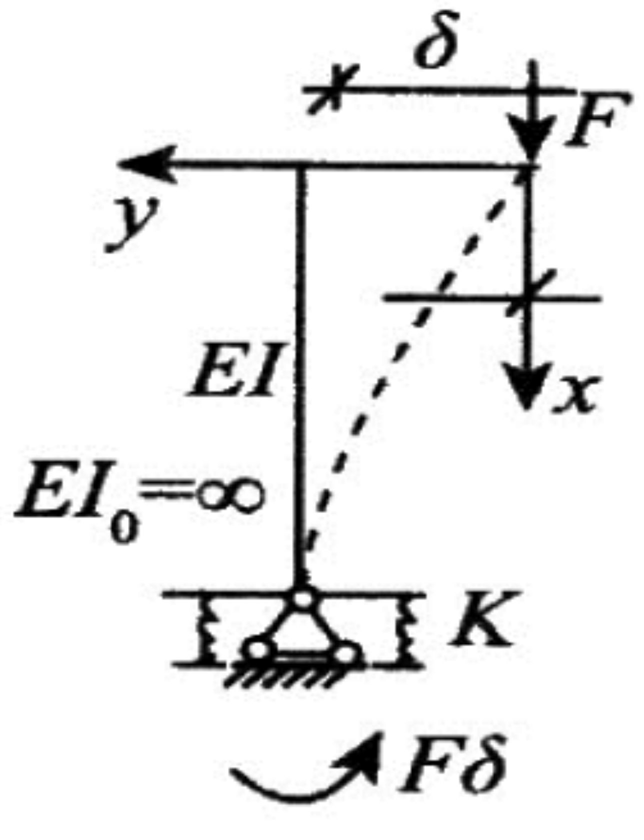


图 13-2-24

解：画出此结构变形图，如图 13-2-24 所示。

列出相关方程如下

$$EIy''=-Fy'(0\leqslant x\leqslant l)$$

令 $n^2=\frac{F}{EI}$，则

$$y=A\cos nx+B\sin nx$$

边界条件

$x=0$，$y=0$，得 $A=0$

$$x=l, y=\delta-a\frac{F\delta}{k}，有 B\sin nl-\delta\left(1-\frac{aF}{\delta}\right)=0$$

$$x=l, y'=\frac{F\delta}{k}，有 Bn\cos nl-\frac{F\delta}{k}=0$$

根据上述条件，有稳定方程如下

$$\begin{vmatrix} \sin nl & -\left(1-\frac{aF}{k}\right) \\ n\cos nl & -\frac{F}{k} \end{vmatrix}=0$$

展开得到

$$\frac{F}{k}\sin nl-\left(1-\frac{aF}{k}\right)n\cos nl=0$$

$$\frac{\tan nl}{n}=\frac{k}{F}-a=\frac{k}{n^2 EI}-a$$

$$\frac{\tan nl}{nl}=\frac{kl}{(nl)^2 EI}-\frac{a}{l}$$

要给出 a 对 l 的相对值及 k 对$\frac{EI}{l}$的相对值时，方可具体求解。

13-12　试用能量法作题 13-1～13-4。

解：（1）解题 13-1，能量公式如下

$$U=\frac{k}{2}\delta^2，V=-F\times\frac{1}{2}(\frac{\delta^2}{a}+\frac{\delta^2}{b}+\frac{\delta^2}{b})$$

$$\Pi=U+V=\frac{k}{2}\delta^2-\frac{F}{2}(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})\delta^2$$

$$\frac{d\Pi}{d\delta}=[k-F(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})]\delta=0$$

因为$\delta\neq0$ ，故$k-F\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=0$，得临界荷载如下

$$F_{cr}=\frac{abk}{b+2a}$$

（2）解题 13-2，能量公式如下

$$U=\frac{k}{2}\delta^2$$

均布荷载可用其合力代替，故有如下能量公式

$$V=-2qa\times\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{a}=-q\delta^2$$

$$\Pi=U+V=\frac{k}{2}\delta^2-q\delta^2$$

$$\frac{d\Pi}{d\delta}=(k-2q\delta)=0$$

因为$\delta\neq0$，故 k＝2q，得临界荷载为$q_{cr}=\frac{k}{2}$ 。

（3）解题 13-3，能量公式如下

$$U=\frac{1}{2}k_1\left(\frac{4\delta}{3}\right)^2+\frac{1}{2}k_2\delta^2$$

$$V=-F\times\frac{1}{2}\left[\frac{(2\delta)^2}{3a}+\frac{(2\delta)^2}{2a}\right]$$

$$\Pi=U+V=\frac{1}{2}\left[\frac{16}{9}k_1+k_2-F\left(\frac{4}{3a}+\frac{2}{a}\right)\right]\delta^2$$

$$\frac{d\Pi}{d\delta}=\left(\frac{16}{9}k_1+k_2-\frac{10F}{3a}\right)\delta=0$$

由于$\delta\neq0$，故临界荷载为

$$F_{cr}=\left(\frac{8}{15}k_1+\frac{3}{10}k_2\right)a$$

（4）解题 13-4，能量公式如下

$$u=\frac{1}{2}k\left(\frac{y_1}{a}-\frac{y_2-y_1}{a}\right)^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{y_2}{a}+\frac{y_2-y_1}{a}\right)^2$$
$$=\frac{k}{2a^2}[(2y_1-y_2)^2+(2y_2-y_1)^2]$$

$$V=-F\times\frac{1}{2}\left[\frac{y_1^2}{a}+\frac{(y_2-y_1)^2}{a}+\frac{y_2^2}{a}\right]=-\frac{F}{a}(y_1^2-y_1y_2+y_2^2)$$

$$\Pi=U+V=\frac{k}{2a^2}\left(5y_1^2-8y_1y_2+5y_2^2\right)-\frac{F}{a}\left(y_1^2-y_1y_2+y_2^2\right)$$
$$=\frac{1}{a}\left[\left(\frac{5k}{2a}-F\right)y_1^2-\left(\frac{4k}{a}-F\right)y_1y_2+\left(\frac{5k}{2a}-F\right)y_2^2\right]$$

由上述公式可得

$$\frac{\partial\Pi}{\partial y_1}=0,\quad\left(\frac{5k}{a}-2F\right)y_1-\left(\frac{4k}{a}-F\right)y_2=0$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial y_2}=0,\quad-\left(\frac{4k}{a}-F\right)y_1+\left(\frac{5k}{a}-2F\right)y_2=0$$

以上两式系数行列式等于零并展开，有

$$\left(\frac{5k}{a}-2F\right)^2-\left(\frac{4k}{a}-F\right)^2=0$$

解得临界荷载如下

$$F=\begin{cases}\frac{3k}{a}\text{（较大，不取）}\\ \frac{k}{a}=F_{cr}\end{cases}$$

故其临界荷载为$F_{cr}=\frac{k}{a}$。

13-13　试用能量法求题 13-5 的临界荷载。设失稳时压杆弹性部分的曲线可近似地取为抛物线$y=\frac{ax^2}{l^2}$。

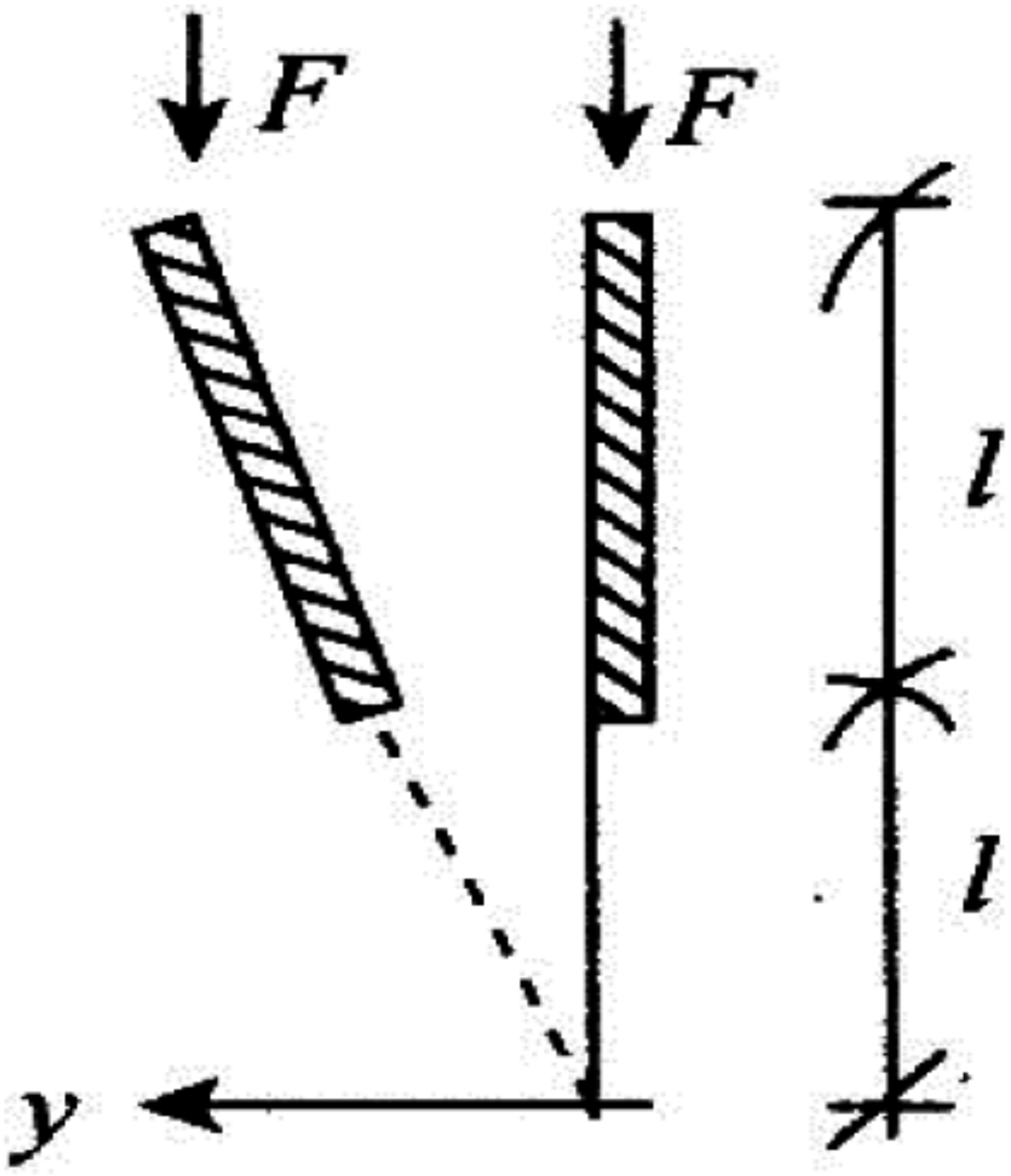


图 13-2-25

答：弹性部分取抛物线方程$y=\frac{ax^2}{l^2}$，如图 13-2-25 所示。

则

$$y'=\frac{2ax}{l^2},y'_{x=l}=\frac{2a}{l}$$

$$y''=\frac{2a}{l^2}$$

能量公式如下

$$u=\frac{1}{2}\int_0^l EI(y'')^2dx=\frac{EI}{2}\int_0^l\left(\frac{2a}{l^2}\right)^2dx=\frac{2EI}{l^3}a^2$$

$$\begin{aligned}v&=-\frac{F}{2}\left[\int_0^l(y')^2dx+(y'_{x=l})^2\cdot l\right]\\&=-\frac{F}{2}\left[\int_0^l\left(\frac{2ax}{l^2}\right)^2dx+\left(\frac{2a}{l}\right)^2l\right]\\&=-\frac{8F}{3l}a^2\end{aligned}$$

$$\pi=\left(\frac{2EI}{l^3}-\frac{8F}{3l}\right)a^2$$

$\frac{d\pi}{da}=0$，而 a≠0，有$\frac{2EI}{l^3}-\frac{8F}{3l}=0$

得临界荷载为$F_{cr}=\frac{3EI}{4l^2}$，比精确解$\frac{0.7401EI}{l^2}$大 1.3%。

13-14　试用能量法求题 13-6 的临界荷载。设失稳时压杆弹性部分的曲线可近似地采用简支梁在杆端受一力偶作用的挠曲线$y=ax\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)$。

解：弹性部分取抛物线方程$y=ax\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)$

则

$$y'=\left(1-\frac{3x^2}{l^2}\right)a,y'_{x=l}=-2a$$

$$y''=-\frac{6x}{l^2}a$$

能量公式如下

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l EI(y'')^2dx=\frac{EI}{2}\int_0^l\left(-\frac{6x}{l^2}a\right)^2dx=\frac{6EI}{l}a^2$$

$$V=-\frac{F}{2}\left[\int_0^l (y')^2dx+\left(y'_{x=l}\right)^2 l\right]=-\frac{F}{2}\left[\int_0^l\left(1-\frac{3x^2}{l^2}\right)^2 a^2dx+(-2a)^2 l\right]$$

$$-\frac{F}{2}\left(l-2l+\frac{9}{5}l+4l\right)a^2=-\frac{12l}{5}Fa^2$$

$$\Pi=\left(\frac{6EI}{l}-\frac{12l}{5}F\right)a^2$$

$\frac{d\Pi}{da}=0$，而 $a\neq 0$ 有 $\frac{6EI}{l}-\frac{12l}{5}F=0$

得 $F_{cr}=\frac{5EI}{2l^2}$，比精确解 $\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$ 大 1.3%

。

13-15　试用能量法求图示阶形压杆的临界荷载。设挠曲线取为 $y=a\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right)$。

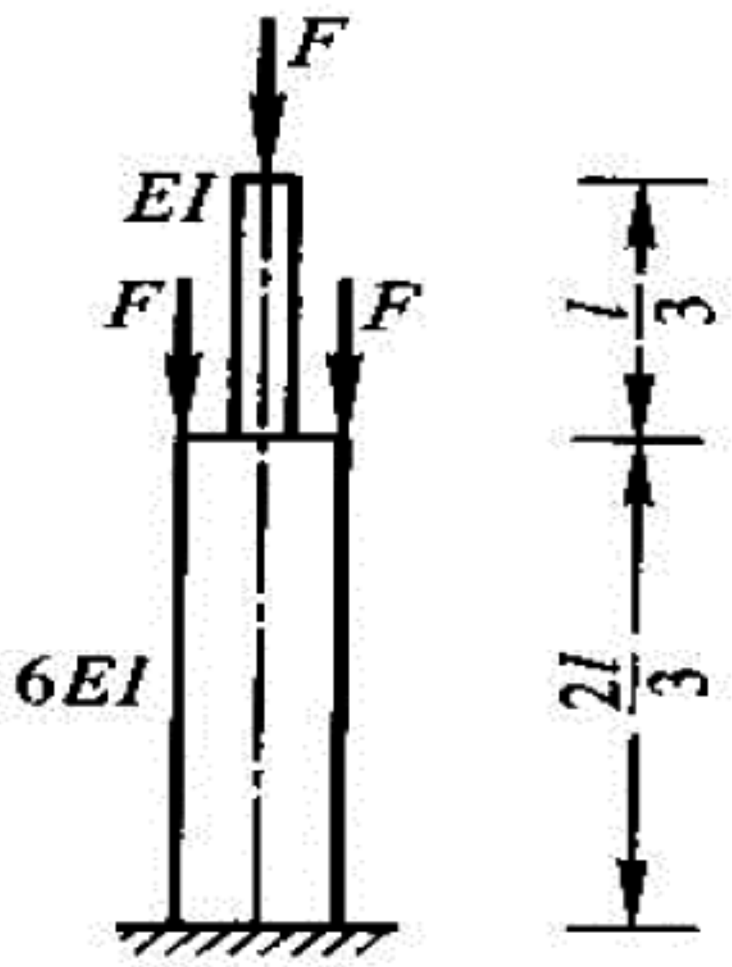


图 13-2-26（题 13-15）

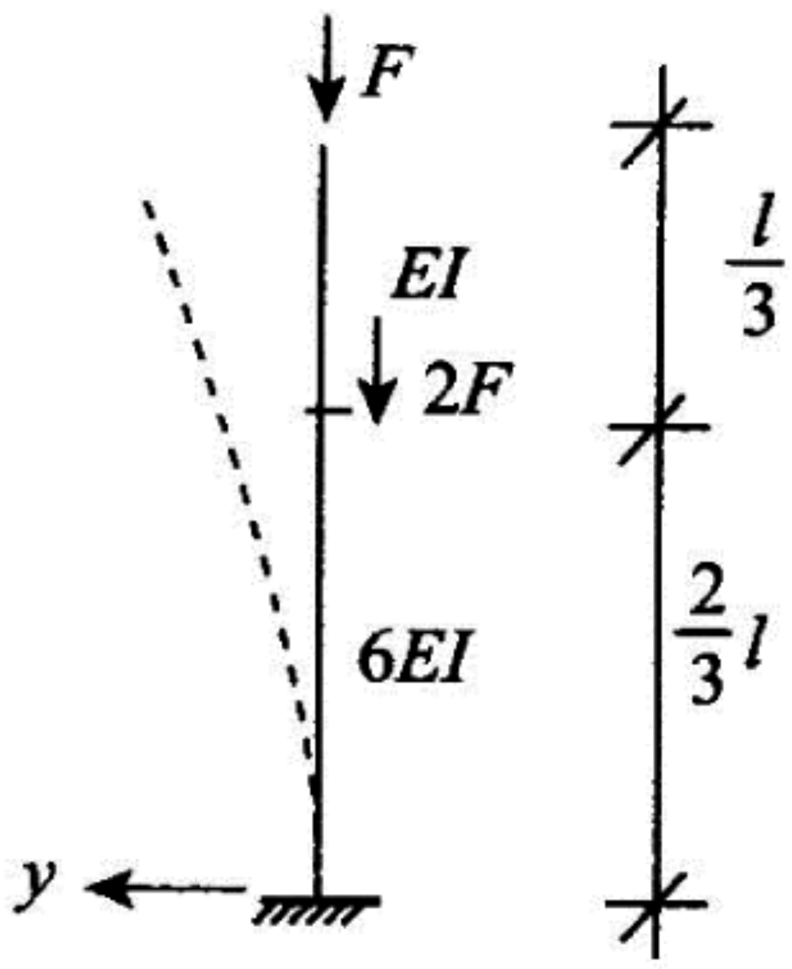


图 13-2-27

解：阶形压杆的变形图如图 13-2-27 所示。

挠曲线为

$$y=a\left(1-\cos\frac{\pi}{2l}x\right)$$

$$y'=\frac{\pi a}{2l}\sin\frac{\pi}{2l}x$$

$$y''=\frac{\pi^2 a}{4l^2}\cos\frac{\pi}{2l}x$$

能量公式如下

$$u=\frac{6EI}{2}\int_0^{\frac{2}{3}l}\left(\frac{\pi^2 a}{4l^2}\cos\frac{\pi}{2l}x\right)^2dx+\frac{EI}{2}\int_{\frac{2}{3}l}^{l}\left(\frac{\pi^2 a}{4l^2}\cos\frac{\pi}{2l}x\right)^2dx$$

$$=\frac{\pi^2 EIa^2}{32l^4}\left[6\int_0^{\frac{2}{3}l}\cos^2\frac{\pi x}{2l}dx+\int_{\frac{2}{3}l}^{l}\cos^2\frac{\pi x}{2l}dx\right]$$

$$=\frac{\pi^4 EIa^2}{32l^4}\left[6\left(\frac{l}{3}+\frac{l}{2\pi}\sin\frac{2}{3}\pi\right)+\left(\frac{l}{2}-\frac{l}{3}-\frac{l}{2\pi}\sin\frac{2}{3}\pi\right)\right]$$

$$=\frac{\pi^4 EIa^2}{32l^4}\left(\frac{13}{6}l+\frac{5l}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\pi^4 EIa^2}{32l^3}\left(\frac{13}{6}+\frac{5\sqrt{3}}{4\pi}\right)$$

$$V=-\frac{F}{2}\int_0^{l}\left(\frac{\pi a}{2l}\sin\frac{\pi}{2l}x\right)^2dx-\frac{2F}{2}\int_0^{\frac{2}{3}l}\left(\frac{\pi a}{2l}\sin\frac{\pi}{2l}x\right)^2dx$$

$$=-\frac{F\pi^2 a^2}{8l^2}\left[\int_0^{2}\sin^2\frac{\pi}{2l}xdx+2\int_0^{\frac{2}{3}l}\sin^2\frac{\pi}{2l}xdx\right]$$

$$=-\frac{F\pi^2 a^2}{8l^2}\left[\frac{l}{2}+2\left(\frac{l}{3}-\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2}{3}\pi\right)\right]$$

$$=-\frac{F\pi^2 a^2}{8l^2}\left[\frac{7l}{6}-\frac{1}{\pi}\sin\frac{2}{3}\pi\right]$$

$$=-\frac{F\pi^2 a^2}{8l^2}\left(\frac{7}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)$$

$$\pi=u+v=\left[\frac{\pi^2 EI}{32l^3}\left(\frac{13}{6}+\frac{5\sqrt{3}}{4\pi}\right)-\frac{F\pi^2}{8l^2}\left(\frac{7}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)\right]a^2$$

由于$\frac{d\pi}{da}=0,a\neq0$，则可求解出临界荷载为

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{4l^2}\frac{\left(\frac{13}{6}+\frac{5\sqrt{3}}{4\pi}\right)}{\left(\frac{7}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)}=\frac{7.908EI}{l^2}$$

13-16 试写出等截面无铰圆拱在径向均布荷载 q 作用下的稳定方程。计算已证实，最小临界荷载发生在反对称变形的情况下。

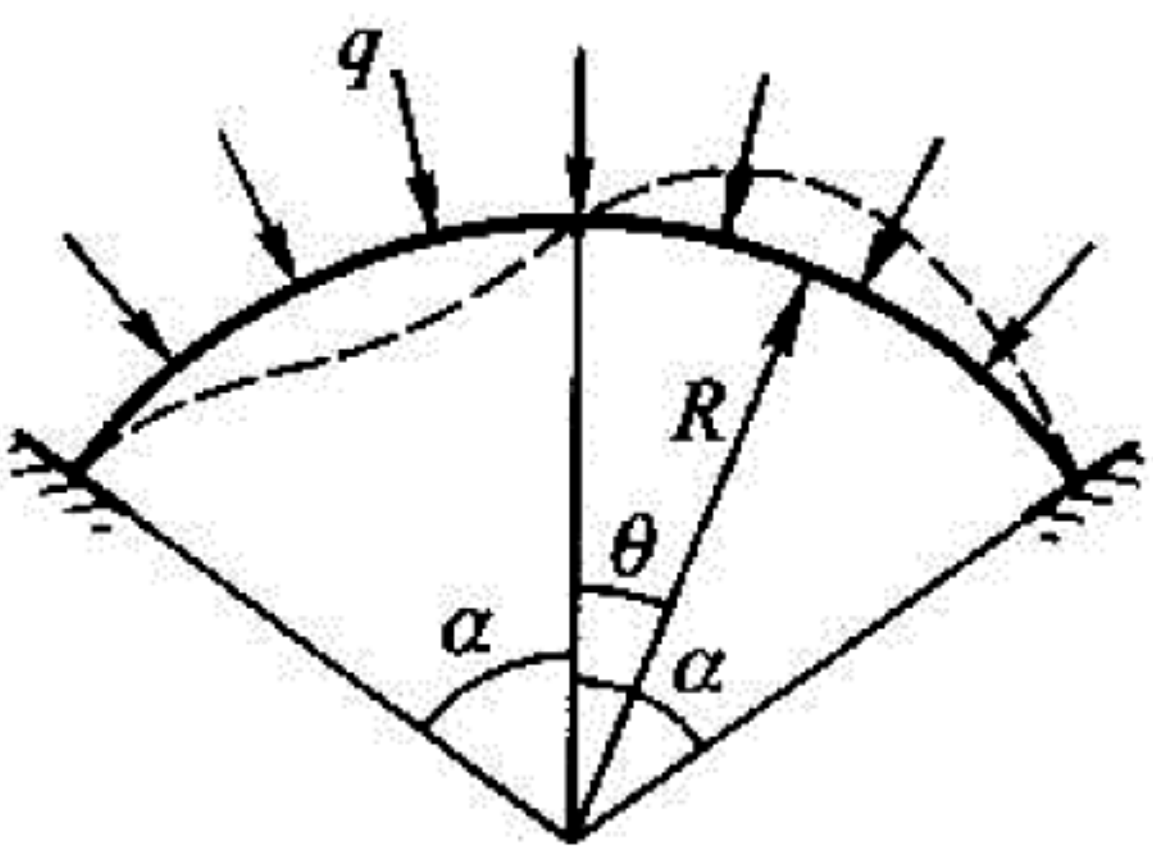


图 13-2-28（题 13-16）

解：ω 应为 θ 的奇函数，故有

$$\omega=A_2\sin\theta+A_4\sin n\theta$$

其中 $n^2=1+\frac{qR^2}{EI}$

边界条件 θ =0 时，有 ω=0 及 ω′=0，故有下列关系式

$$A_1\sin\alpha+A_4\sin n\alpha=0$$

$$A_2\cos\alpha+A_4 n\cos n\alpha=0$$

由 A_2、A_4 不全为零，由系数行列式为零并展开有

$$n\sin\alpha\cos n\alpha-\sin n\alpha\cos\alpha=0,\text{即 } n=\frac{\tan n\alpha}{\tan\alpha}\text{或}\frac{\tan n\alpha}{n\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\alpha}$$

13—17　图示半径为 R 的圆环在直径方向设有一横撑，试写出在径向均布压力 q 作用下的稳定方程。

提示：将半个圆环当作具有弹性固定端的无铰拱。在计算弹簧抗转刚度 k 时，取结点 A 为隔离体，当拱端力偶为 1 时，横撑一端的力偶为 2，由此可算出横撑两端的转角，也就是拱端的转角。

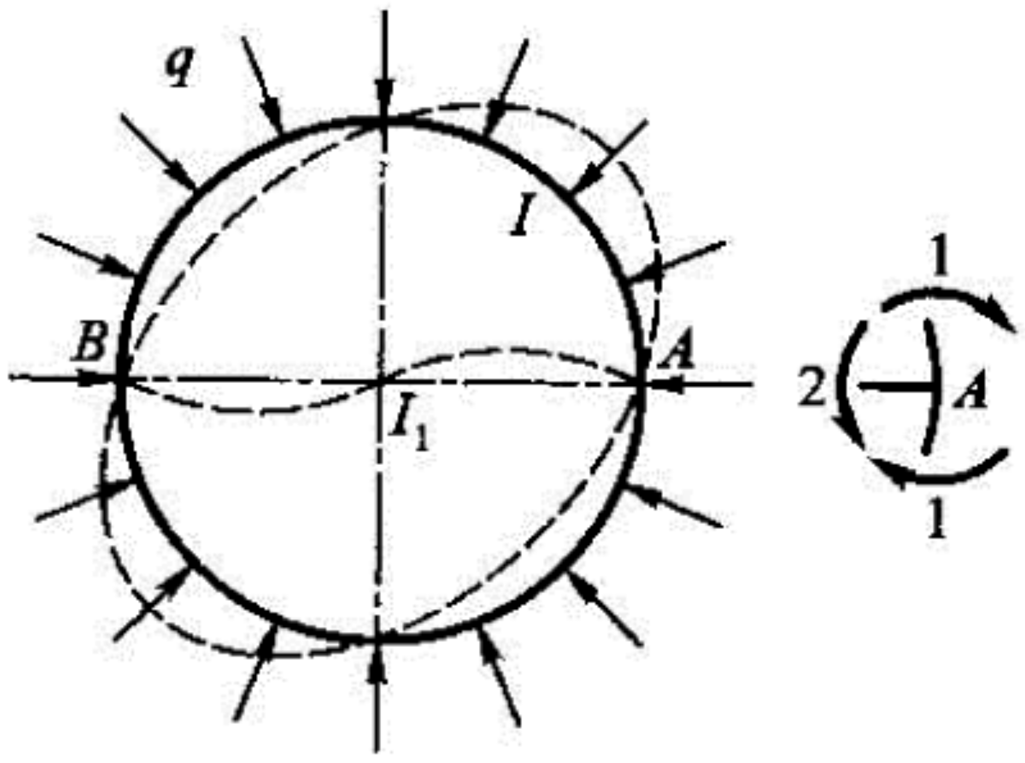


图 13-2-28（题 13-17）

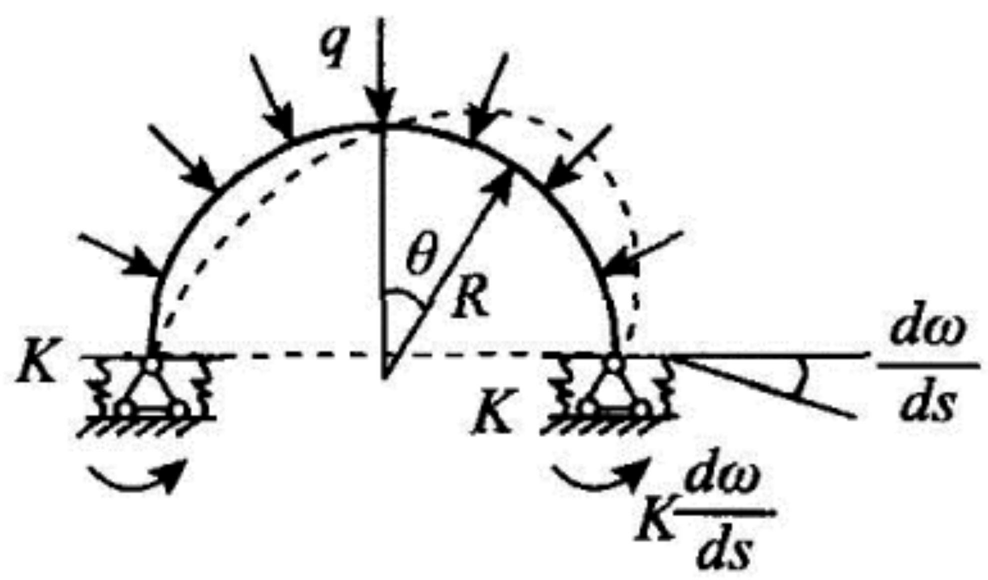


图 13-2-29

解：取一半结构的变形图如图 13-2-29 所示。

反对称失稳，临界力较小，当结点 A、B 转动单位角时，横撑力矩为$\frac{3EI_1}{R}$，此时拱端力矩即抗转弹簧刚度，由结点力矩平衡知 $k=\frac{3EI_1}{2R}$，反对称变形时，ω、M 均为 θ 的奇函数，故由教材公式 $\omega=A_1+A_2\sin\theta+A_3\cos\theta+A_4\sin n\theta+A_5\cos n\theta$ 有

$$\omega=A_2\sin\theta+A_4\sin n\theta$$

$$\frac{d\omega}{ds}=\frac{1}{R}\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{R}(A_1\cos\theta-A_2 n\cos n\theta)$$

$$M=-\frac{EI}{R^2}A_4(1-n^2)\sin n\theta$$

边界条件

$$\theta=\frac{\pi}{2},\omega=0$$

$$\theta=-\frac{\pi}{2},M=+k\frac{d\omega}{ds}=\frac{3EI_1}{2R}\frac{d\omega}{ds}$$

根据边界条件有

$$A_2\sin\frac{\pi}{2}+A_4 n\sin\frac{n\pi}{2}=0$$

$$-\frac{EI}{R^2}A_4(1-n^2)\sin\frac{\pi n}{2}=\frac{3EI_1}{2R^2}(A_2\cos\frac{\pi}{2}+A_4 n\cos\frac{\pi n}{2})$$

即

$$A_2+A_4 n\sin\frac{n\pi}{2}=0$$

$$0+A_4\left[I(1-n^2)\sin\frac{\pi}{2}n+\frac{3}{2}I_1 n\cos\frac{\pi}{2}n\right]=0$$

A_2、A_4 不全为零，由上二式系数行列式等于零并展开得

$$I(1-n^2)\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{3I_1}{2}n\cos\frac{\pi n}{2}=0$$

即得到最终结果如为

$$\tan\frac{\pi n}{2}=\frac{3I_1}{2I}\frac{n}{n^2-1}$$

13-18　图示狭长矩形截面筒支梁在 xy 平面内承受一对偏心压力 F 的作用，设 Fe＝M。试求其临界荷载，并讨论当（a）e＝0，（b）F＝0，但设梁两端有力偶 M 作用时的情形。

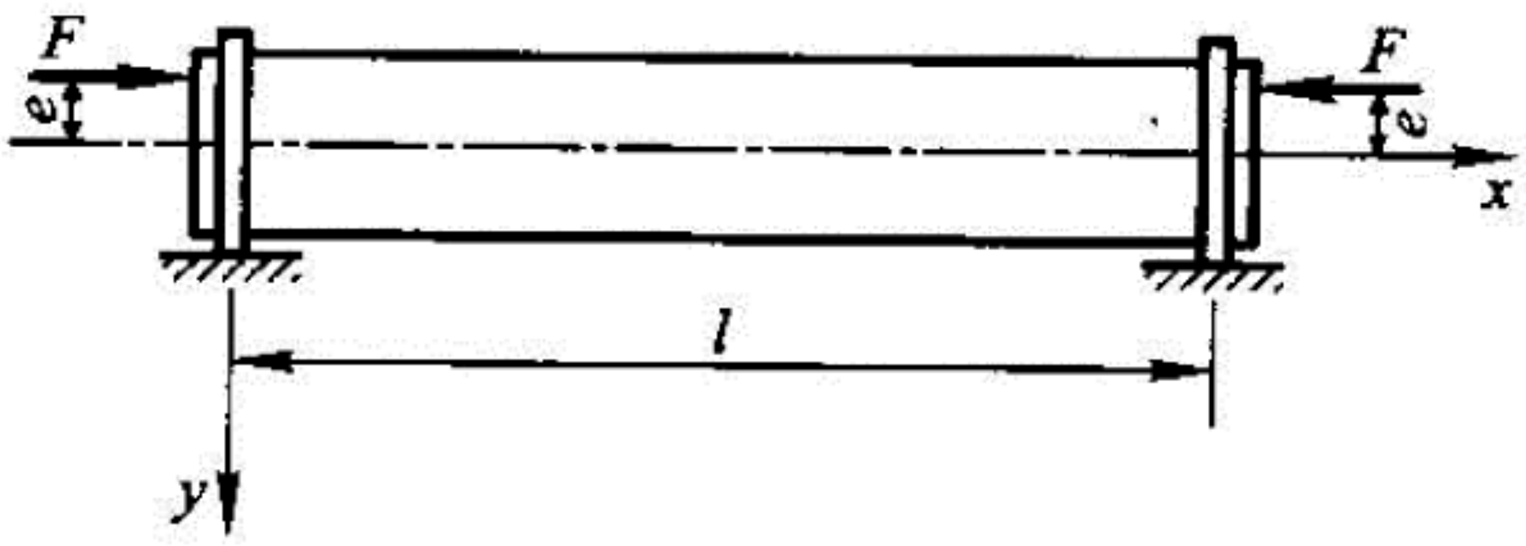


图 13-2-30（题 13-18）

解：该题图解示意图如图 13-2-31 所示。

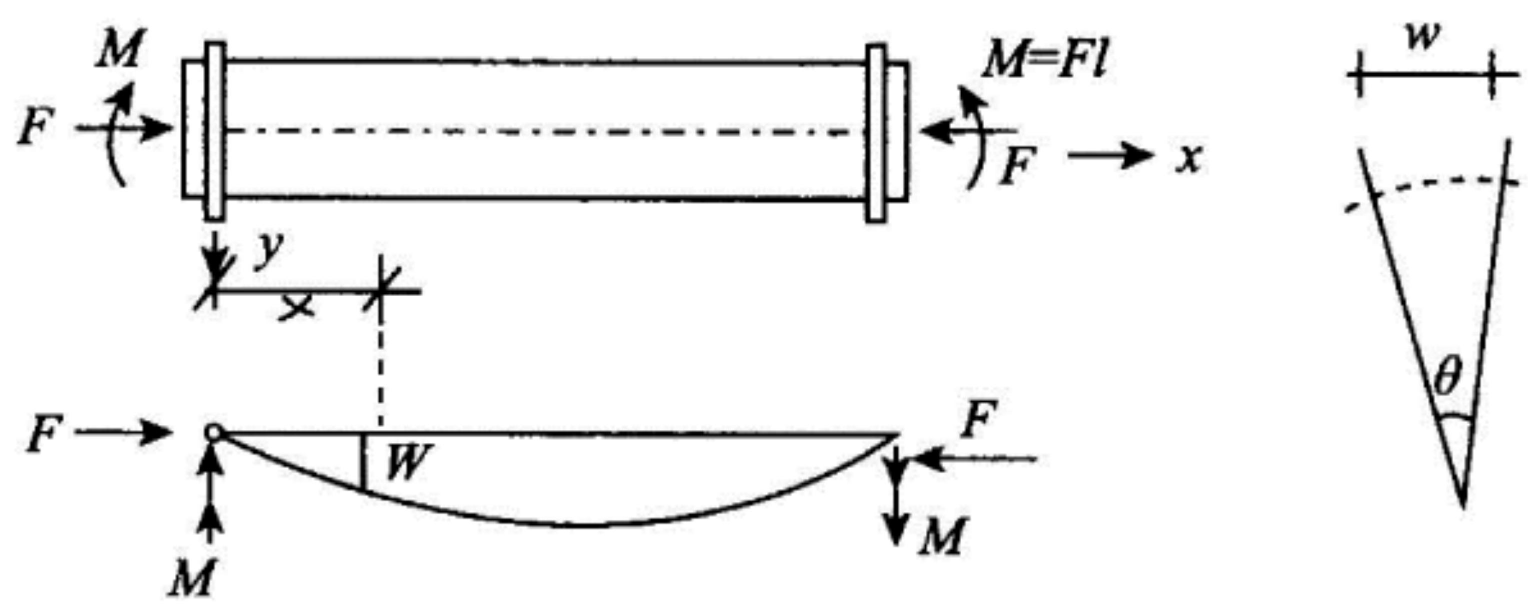


图 13-2-31

侧向弯曲及扭矩微分方程为

$$EI_y\frac{d^2\omega}{dx^2}=-M\theta-F\omega \qquad (a)$$

$$GI_e\frac{d\theta}{dx}=M\frac{d\omega}{dx} \qquad (b)$$

由（b）式解得

$$\theta=\frac{M}{GI_t}\omega+c$$

边界条件 x＝0，w＝0，θ＝0，得 c＝0，代入（a）式有

$$EI_y\frac{d^2\omega}{dx^2}=-\frac{M^2}{GI_t}\omega-F\omega$$

即

$$\frac{d^2\omega}{dx^2}+\left(\frac{M^2+GI_tF}{EI_yGI_t}\right)\omega=0$$

令

$$n^2=\frac{M^2+GI_tF}{EI_yGI_t} \qquad (c)$$

有

$$\frac{d^2\omega}{dx^2}+n^2\omega=0$$

解得

$$\omega=A\sin nx+B\cos n$$

边界条件

x＝0，ω＝0 得 B＝0

x＝l，ω＝0，得 A$\sin nl$＝0

因为 A≠0，故 $\sin nl=0$，$(nl)_{\min}=\pi$，代入（c）式得

$$M^2+GI_tF=\frac{\pi^2EI_yGI_t}{l^2}$$

讨论：（1）当 e＝0 时，则 M＝0，有 $F_{cr}=\frac{\pi^2EI_y}{l^2}$。

（2）当 F＝0 且 M≠0 时，则有 $M_{cr}=\frac{\pi}{l}\sqrt{EI_yGI_t}$ 。

13.3　名校考研真题详解

一、填空题

图 13-3-1 所示结构，当立柱失稳时，q 值等于____。[西南交通大学 2007 研]

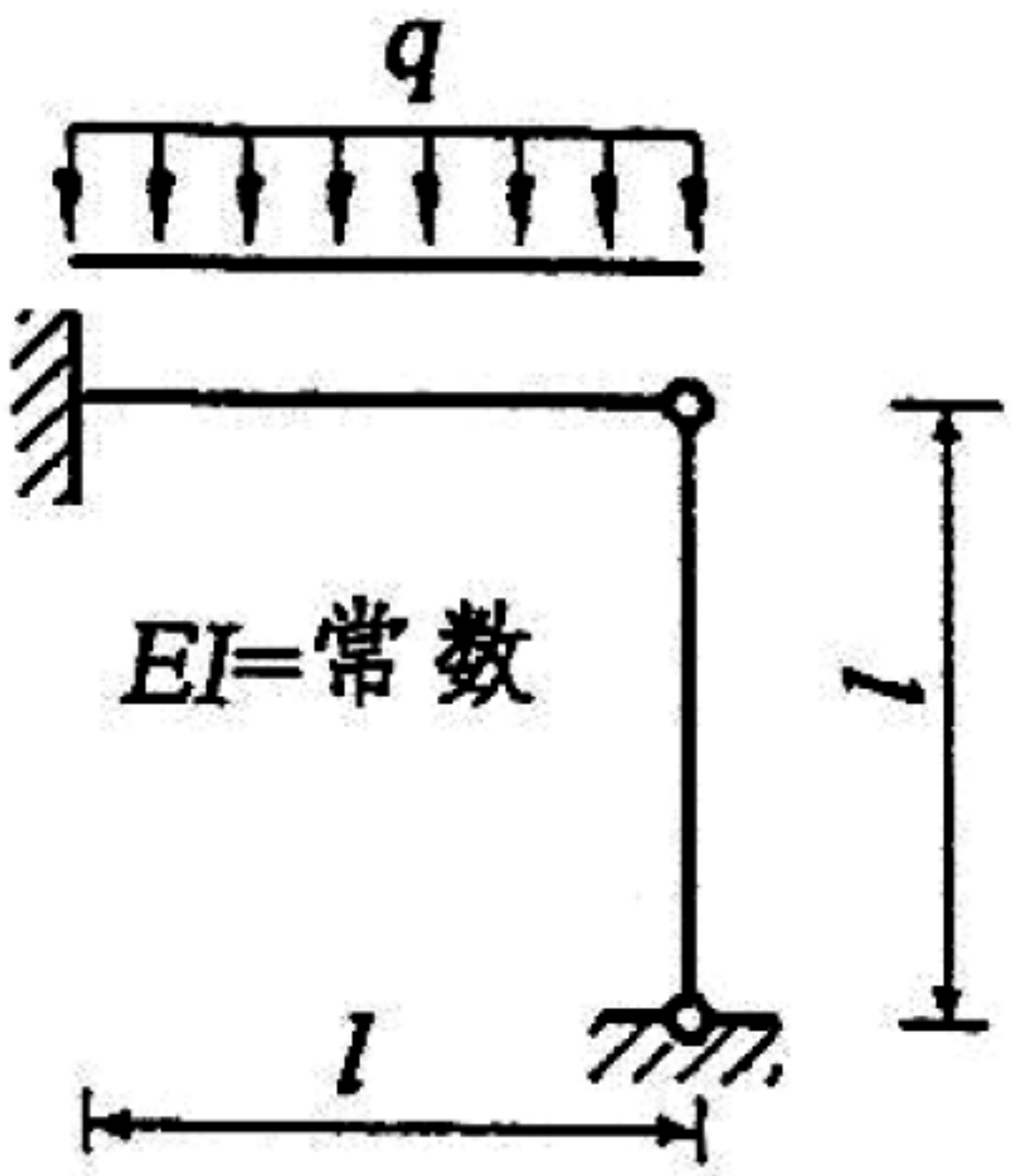


图 13-3-1

【答案】$\frac{8}{3}\cdot\frac{\pi^2EI}{l^3}$

【解析】一端固定一端铰支的超静定结构在铰支端剪力的大小为 $\frac{3ql}{8}$,轴心受压两端铰支的欧拉临界荷载为

$\dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$，所以当$\dfrac{\pi^2 EI}{l^2}=\dfrac{3ql}{8}$时，立柱失稳，此时$q=\dfrac{8}{3}\dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$。

二、选择题

图 13-3-2 所示弹性支承刚性压杆体系，其临界荷载为（　　）。[西南交通大学 2005 研]

A. 0　　B. $F_{cr}=kl$　　C. $F_{cr}=2kl$　　D. $F_{cr}=kl/2$

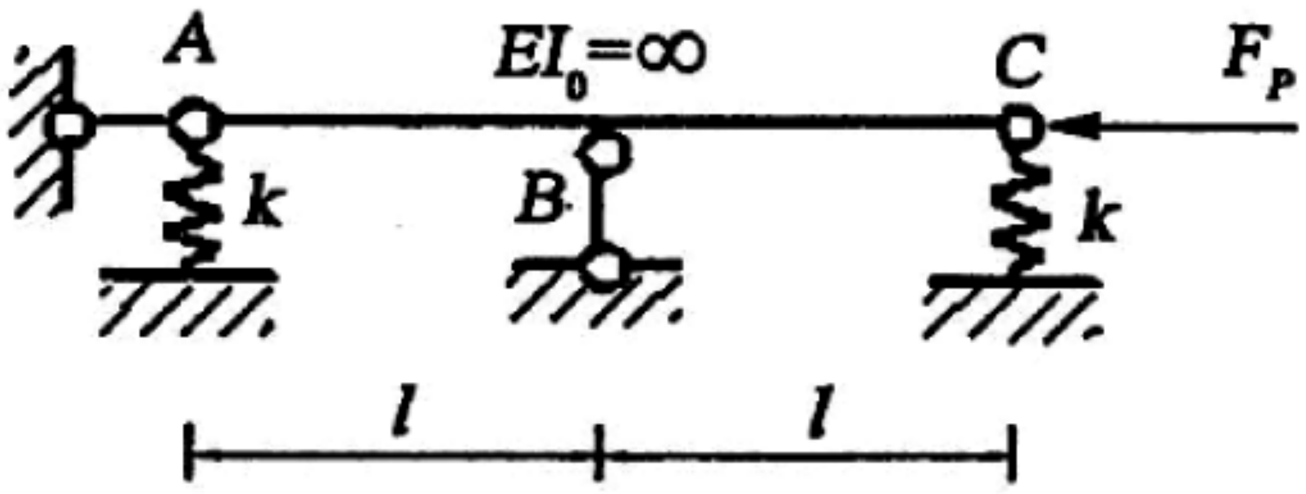


图 13-3-2

【答案】B

【解析】该题所示杆件为刚性杆，假设在 A 处产生一个微小位移Δl，则在 B 处也会产生一个微小位移Δl，向 C 点取矩，可列平衡方程：$F_{cr}\Delta l=k\Delta l\cdot l$，故算得临界荷载$F_{cr}=kl$。

三、计算题

已知：$y=ax(l^2-x^2)$，求q_{Cr}。[同济大学 2004 研]

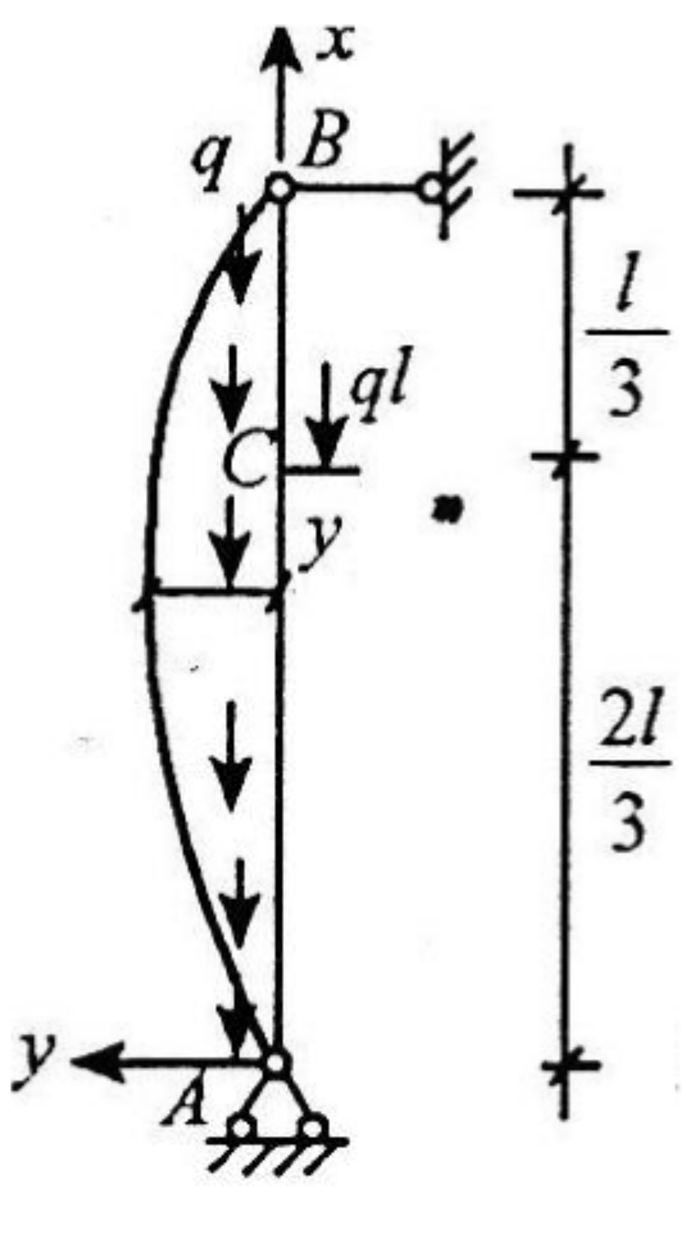


图 13-3-3

解：（1）本题采用能量法进行求解。由位移的方程可求得

$$y''=-6ax$$

则系统的能量为

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l EI(y'')^2\mathrm{d}x=18EIa^2\int_0^l x^2\mathrm{d}x=6EIa^2l^3$$

（2）为了方便研究，将图示结构翻转，建立如下图 13-3-4 所示的方程体系。

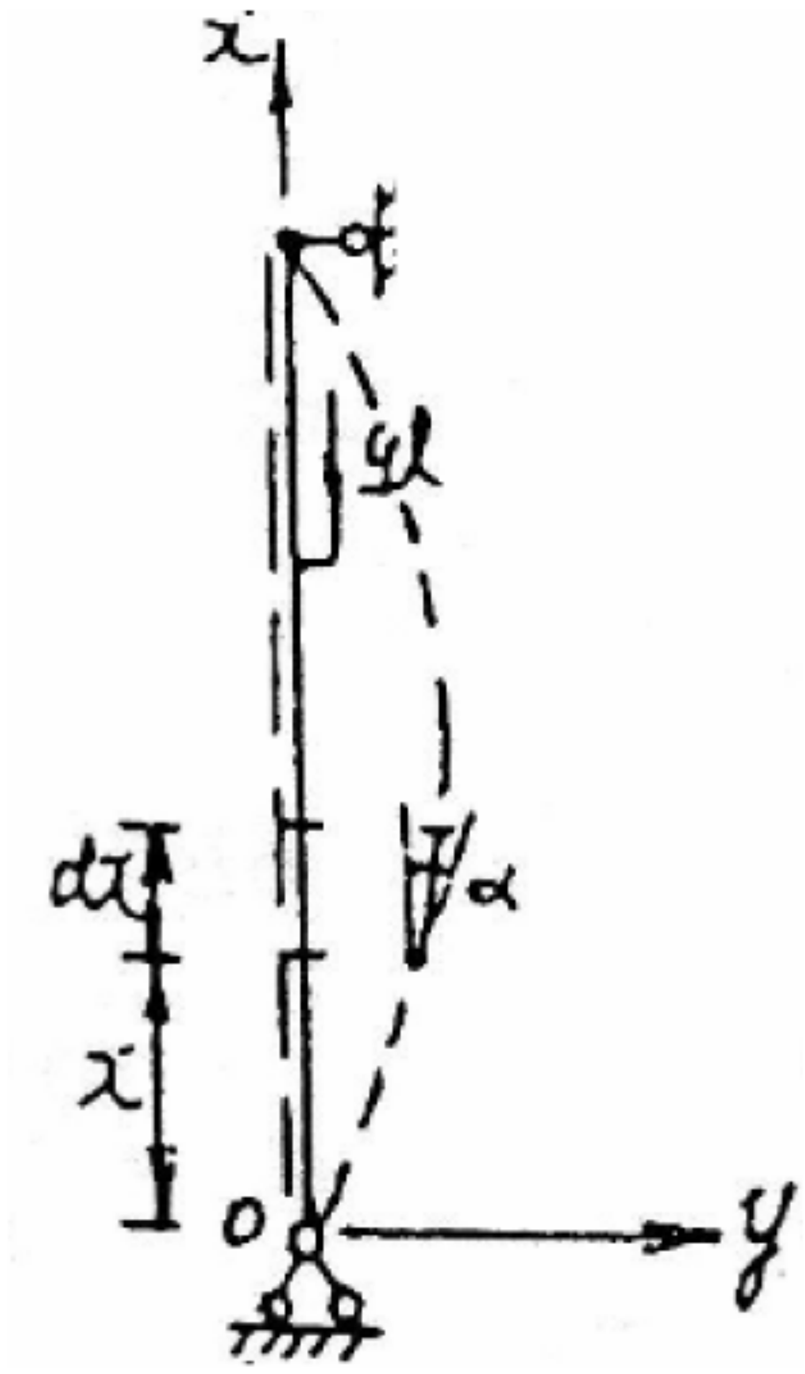


图 13-3-4

则由图示可得，由于杆件的倾斜会是整个系统产生向下的下降，距离为

$$d\Delta = dx - dx\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}dx \approx \frac{1}{2}\alpha^2 dx = \frac{1}{2}(y')^2 dx$$

式中， $y' = \alpha(l^2 - 3x^2)$ 。

所以由原点到 2/3l 时下降的距离为

$$\Delta = \int_0^{\frac{2}{3}l} \mathrm{d}\Delta = \int_0^{\frac{2}{3}l} \frac{1}{2}(y')^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{2}{3}l} \frac{1}{2}a^2(l^2 - 3x^2)^2 \mathrm{d}x = \frac{7}{45}a^2 l^5$$

则集中荷载做的功为

$$T_2 = ql\Delta = \frac{7}{45}qa^2 l^6$$

微段上荷载所做的功为

$$\partial T_1 = \frac{1}{2}q(l - x - dx)(y')^2 \mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}q(l - x)(y')^2 \mathrm{d}x$$

沿杆长积分，可得

$$T_1 = \int_0^1 \frac{1}{2}q(1 - x)(y')^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}q\int_0^1 (1 - x)a^2(l^2 - 3x^2)^2 \mathrm{d}x = \frac{3}{20}qa^2 l^6$$

所以外力的势能为

$$V = -(T_1 + T_2) = -\left(\frac{3}{20} + \frac{7}{45}\right)qa^2 l^6 = -\frac{11}{36}qa^2 l^6$$

系统的总能量为

$$\Pi = U + V = 6EIa^2 l^3 - \frac{11}{36}qa^2 l^6$$

则可得

$$\delta\Pi = \frac{d\Pi}{da}\delta a = 2a(6EIl^3 - \frac{11}{36}ql^6)\delta a = 0$$

由于 δa 是任意值，且 a 不等于 0，所以有

$$6EIl^3 - \frac{11}{36}q_{\mathrm{Cr}}l^6 = 0$$

由上式可以解出临界荷载为

$$q_{\mathrm{Cr}} = \frac{216EI}{11l^3} = \frac{19.64EI}{l^3}$$

第 14 章　结构的极限荷载

14.1　复习笔记

【知识框架】

结构的极限荷载
- 塑性分析方法的基本概念
  - 结构分析方法
    - 弹性分析方法
    - 塑性分析方法
  - 塑性分析中力学性能的简化
  - 塑性分析的注意事项
- 极限弯矩、塑性铰、破坏机构与静定梁的计算
  - 塑性铰
    - 塑性铰的定义
    - 塑性铰与普通铰的区别
  - 极限弯矩的定义及求法
  - 破坏机构
  - 静定梁的极限荷载计算
- 单跨超静定梁的极限荷载
  - 超静定梁的特点
  - 极限荷载的计算
    - 静力法求极限荷载
    - 机动法求极限荷载
- 比例加载时有关极限荷载的几个定理
  - 比例加载的定义
  - 结构处于极限状态时满足的条件
    - 机构条件
    - 内力局限条件
    - 平衡条件
  - 破坏荷载与接受荷载
  - 比例加载时有关极限荷载的几个定理
    - 极小定理
    - 极大定理
    - 唯一性定理
- 计算极限荷载的穷举法和试算法
  - 穷举法的描述
  - 试算法的描述
  - 穷举法的计算步骤
  - 试算法的计算步骤
- 连续梁的极限荷载
  - 连续梁的可能破坏机构形式
  - 连续梁的极限荷载的计算
    - 计算方法
    - 计算步骤
- 刚架的极限荷载
  - 刚架的可能破坏机构形式
  - 刚架的极限荷载的计算
    - 计算方法
    - 计算步骤
- 矩阵位移法求刚架极限荷载的概念

【重点难点归纳】

一、塑性分析方法的基本概念

1．结构分析方法

（1）弹性分析方法

①定义

弹性分析方法是指以结构在弹性阶段的最大应力达到极限应力作为结构破坏的标志的结构分析方法，又称为许用应力法。

②强度条件

$$\sigma_{max} \leqslant [\sigma] = \frac{\sigma_u}{k}$$

式中，σ_{max}为结构的实际最大应力；$[\sigma]$为材料的许用应力；σ_u为材料的极限应力，对于脆性材料为其强度极限σ_b，对于塑性材料则为其屈服极限σ_s；k 是安全因数。

③优点

结构在设计荷载作用下，大多数仍处于弹性阶段，因此弹性分析对于研究结构的实际工作状态及其性能仍是很重要的。

④缺点

按许用应力法以个别截面的局部应力来衡量整个结构的承载能力是不够经济合理的，而且以确定许用应力的安全因数 k 也不能反映整个结构的强度储备。

（2）塑性分析方法

①定义

塑性分析方法是指以结构进入塑性阶段并最后丧失承载能力时的极限状态作为结构破坏的标志的结构分析方法。

②极限载荷

极限荷载是指结构在极限状态时所能承受的荷载。

③强度条件

$$F \leqslant \frac{F_u}{K}$$

式中，F 为结构实际承受的荷载；F_u 为极限荷载；K 为安全因数。

④优点

较许用应力法更为经济合理，能较正确地反映结构的强度储备。

⑤缺点

按极限荷载计算结构的方法只反映了结构的最后状态，不能反映结构有弹性阶段再到极限状态的过程，而且在给定安全因数 K 之后，结构在实际荷载作用下处于什么工作状态也无法确定。

2．塑性分析中力学性能简化

在结构的塑性分析中，通常采用图 14-1-1 所示的应力——应变图形。

（1）应力达到屈服极限 σ_s 以前，材料是理想弹性的，应力与应变成正比。

（2）应力达到 σ_s 后，材料转为理想塑性的，即应力保持不变，应变可以任意增长，如 AB 所示。同时，认为材料受拉和受压时的性能相同。

（3）当材料到达塑性阶段的某点 C 时，如果卸载，材料是弹性的，则应力应变将沿着与 OA 平行的直线 CD 下降。应力减至零时，有残余应变 OD。

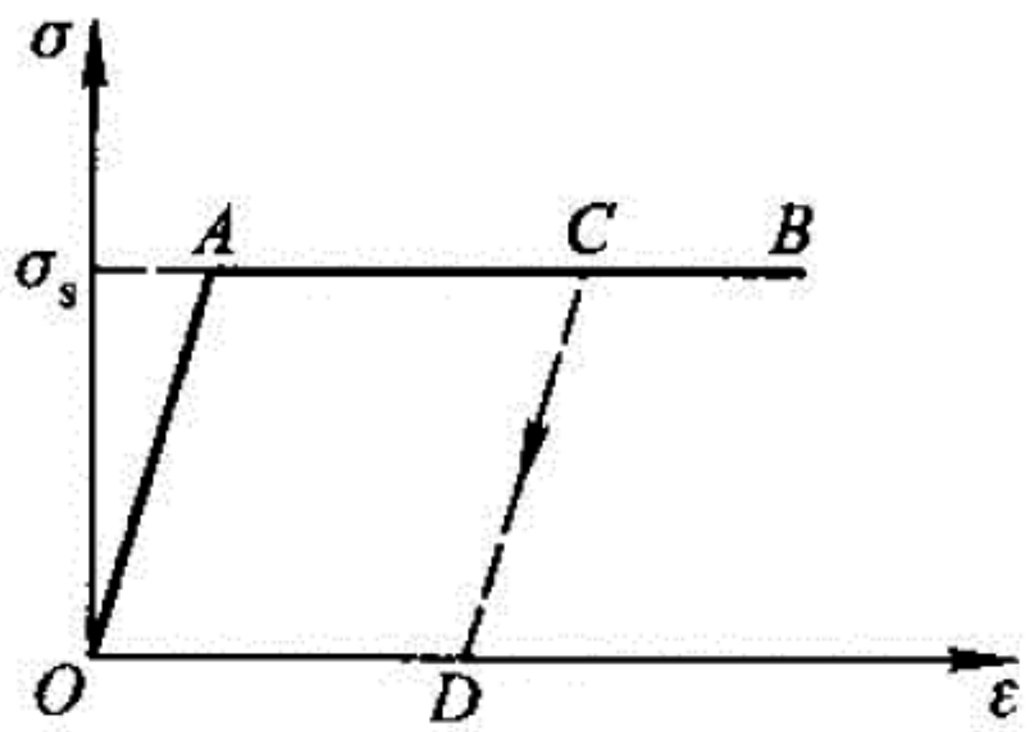


图 14-1-1

3．塑性分析注意事项

在结构的塑性分析中，叠加原理不再适用，因此对于各种荷载组合都必须单独进行计算。

二、极限弯矩、塑性铰、破坏机构与静定梁的计算

1．塑性铰

（1）塑性铰的定义

塑性铰是指使截面的弯矩不能再增大，但弯曲变形则可任意增长的铰。

（2）塑性铰与普通铰的区别

①普通铰不能承受弯矩，而塑性铰则承受着极限弯矩 M_u；

②普通铰可以向两个方向自由转动，即为双向铰，而塑性铰是单向铰，只能沿着弯矩的方向转动，当弯矩减小时，材料则恢复弹性，塑性铰即告消失。

2．极限弯矩

（1）定义

极限弯矩是指截面所能承受的最大弯矩，如图 14-1-2（e）对应的弯矩。

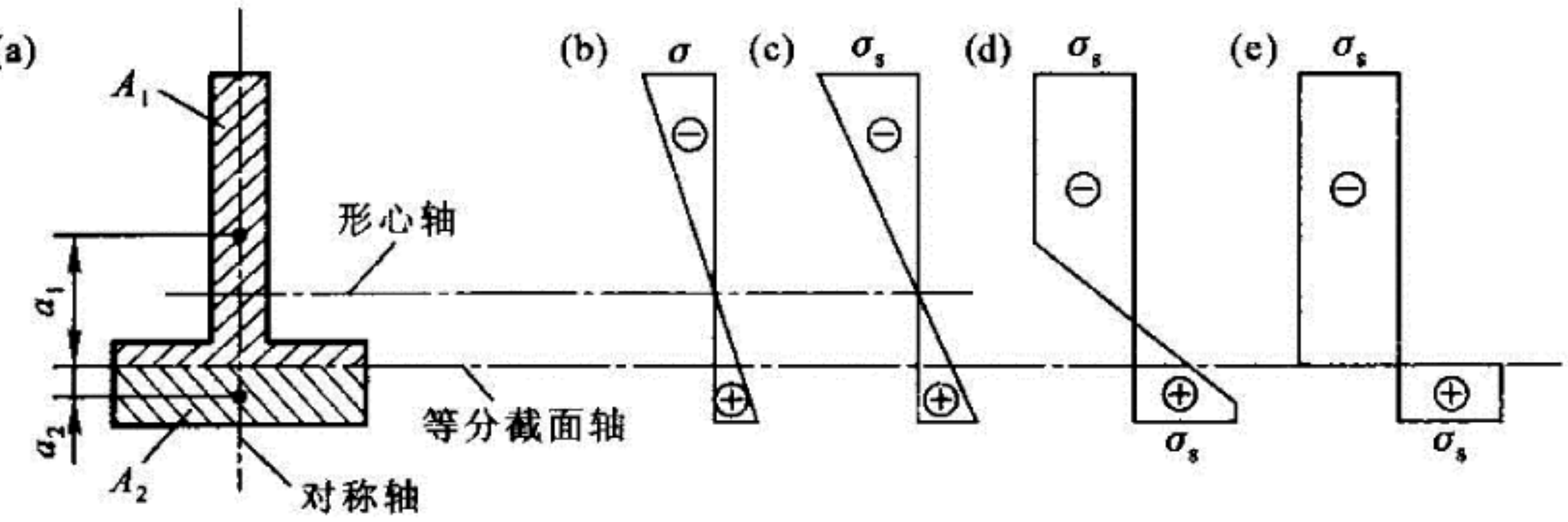


图 14-1-2

（2）求法

①截面上的受压和受拉部分的面积相等

设受压和受拉部分截面面积分别为 A_1 和 A_2，由于梁受竖向荷载作用时轴力为零，故有

$$\sigma_s A_1 - \sigma_s A_2 = 0$$

因而

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$$

式中，A 为梁截面面积。

此时，截面中性轴为等分截面轴。

②计算表达式

a．一般截面

截面上两个方向相反、大小相等均为 $\sigma_s \frac{A}{2}$ 的力则组成为一力偶，则该截面的极限弯矩 M_u 为

$$M_u = \sigma_s A_1 a_1 + \sigma_s A_2 a_2 = \sigma_s (S_1 + S_2)$$

式中，a_1 和 a_2 分别为面积 A_1 和 A_2 的形心到等分截面轴的距离；S_1 和 S_2 为 A_1 和 A_2 对该轴的静矩。

令 $W_s = S_1 + S_2$，称为塑性截面系数，即受压和受拉部分面积对等分截面轴的静矩之和。

则极限弯矩可表为

$$M_u = \sigma_s W_s$$

b．矩形截面

$$W_s = S_1 + S_2 = 2\frac{bh}{2}\frac{h}{4} = \frac{bh^2}{4}$$

故

$$M_u = \frac{bh^2}{4}\sigma_s$$

（3）截面形状系数

①表达式

$$\alpha = \frac{M_u}{M_s} = \frac{W_s}{W}$$

②几种常用截面的 α 值

矩形 α＝1.5；

圆形 α＝1.70；

薄壁圆环形 α≈1.27～1.4（一般可取 1.3）；

工字形 α≈1.1～1.2（一般可取 1.15）。

③矩形 α＝1.5 的含义

对于矩形截面梁来说，按塑性计算比按弹性计算可使截面的承载能力提高 50％。

3．破坏机构

破坏机构是指出现若干塑性铰而成为几何可变或瞬变体系的结构。

破坏机构已丧失了承载能力，达到了极限状态。对于静定梁，出现一个塑性铰即成为破坏机构。

4．静定梁的极限载荷计算

对于等截面梁，塑性铰必定首先出现在弯矩绝对值最大的截面即$|M|_{max}$处。根据塑性铰处的弯矩值等于极限弯矩 M_u 和平衡条件，容易求得静定梁的极限荷载 F_u。

如图 14-1-3（a）所示等截面简支梁，跨中截面弯矩最大。根据平衡条件作出弯矩图（图 14-1-3（c）），由

$$\frac{F_u l}{4} = M_u$$

求得极限荷载为

$$F_u = \frac{4M_u}{l}$$

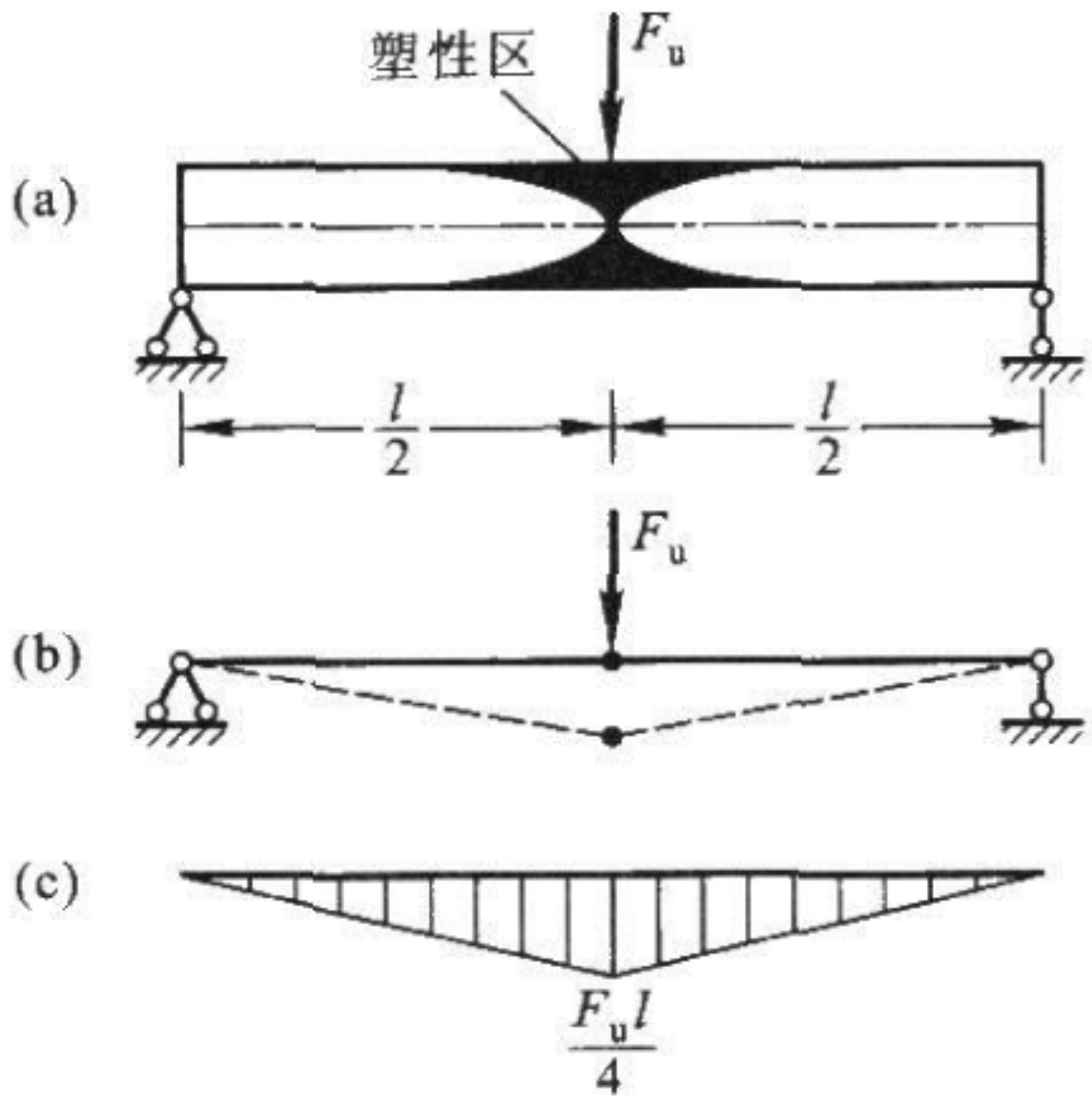


图 14-1-3

三、单跨超静定梁的极限荷载

1．超静定梁的特点

超静定梁只有出现多个的塑性铰而使梁变成几何可变或瞬变体系时，才成为破坏机构，丧失承载能力。

2．极限载荷的计算

例如图 14-1-4（a）所示一端固定一端铰支的等截面梁，在跨中承受集中荷载作用。

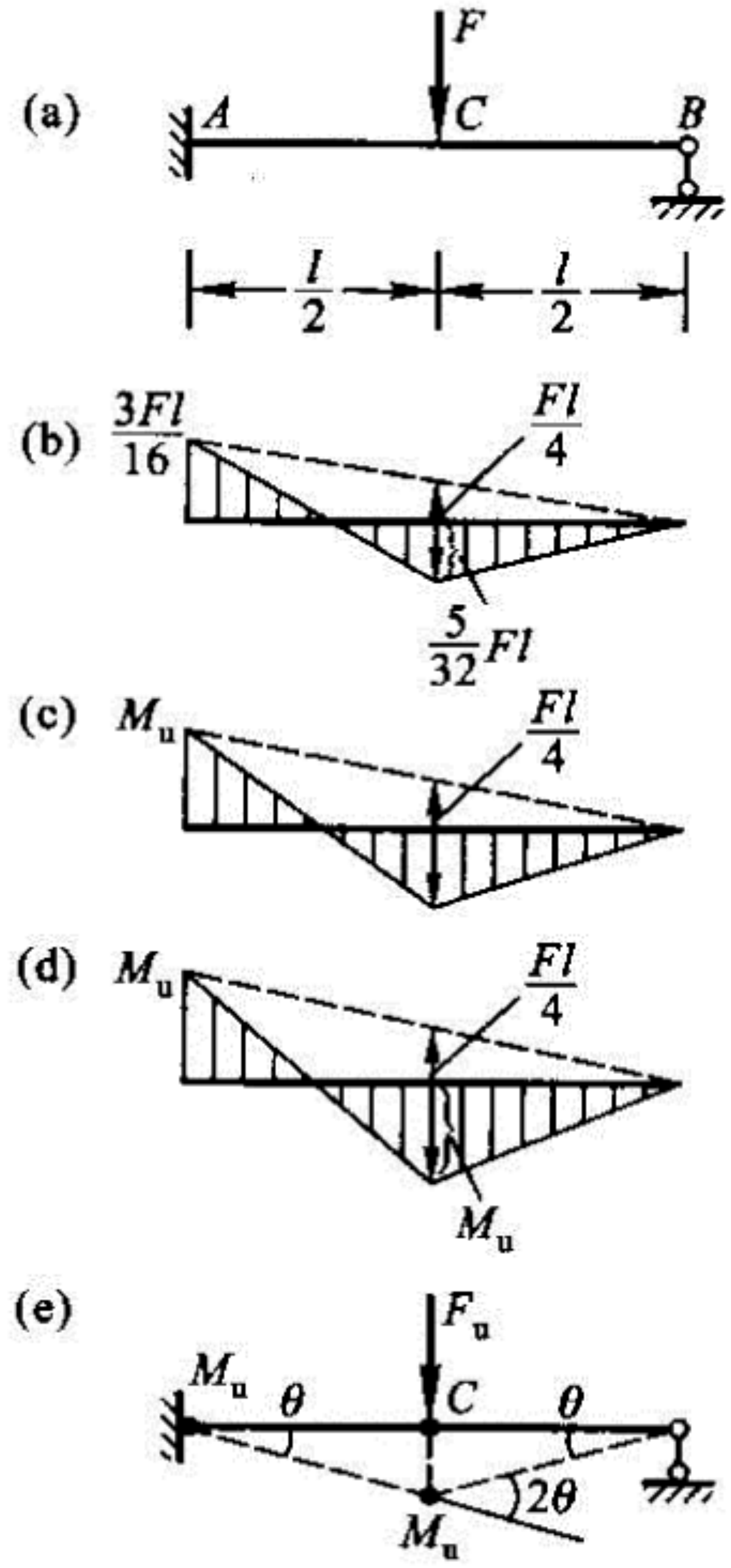


图 14-1-4

（1）梁达到极限状态的过程

①若荷载由零不断增大，A 端弯矩首先达到极限值 M_u，并出现塑性铰。但此时梁并未破坏，它仍是几何不变的。

②若荷载继续增大，A 端弯矩将保持不变，最后跨中截面 C 的弯矩也达到极限值 M_u，从而在该截面也形成塑性铰。梁成为几何可变的机构（图 14-1-4（e）），达到了极限状态。

（2）静力法求极限载荷

①静力法的定义

静力法是指利用静力平衡条件确定极限荷载的方法。

②求极限载荷

破坏机构中各塑性铰处的弯矩都等于极限弯矩，图 14-1-4（a）超静定梁的极限状态的弯矩图按平衡条件可作出如图 14-1-4（d）所示。由图可得

$$\frac{F_u l}{4}-\frac{M_u}{2}=M_u$$

故得

$$F_u=\frac{6M_u}{l}$$

（3）机动法求极限载荷

①机动法的定义

机动法是指利用虚功原理来求得极限荷载的方法。

②求极限载荷

在图 14-1-4（e）中，设机构沿荷载正方向产生任意微小的虚位移，由外力虚功等于变形虚功，可得

$$F_u\frac{l}{2}\theta=M_u\theta+M_u\times 2\theta$$

这里虚位移是机构刚体位移，故在等式右边内力所作的变形虚功中只有各塑性铰处的极限弯矩在其相对转角上所作的功。由上式同样可得

$$F_u = \frac{6M_u}{l}$$

四、比例加载时有关极限荷载的几个定理

1．比例加载的定义

比例加载是指作用于结构上的各个荷载增加时，始终保持它们之间原有的固定比例关系，且不出现卸载现象的加载模式。

在比例加载时，所有荷载都包含一个公共参数 F，称为荷载参数，因此确定极限荷载实际上就是确定极限状态时的荷载参数 F。

2．结构处于极限状态时应满足的条件

（1）机构条件

在极限状态中，结构必须出现足够数目的塑性铰而成为机构（几何可变或瞬变体系），可沿荷载作正功的方向发生单向运动。

（2）内力局限条件

在极限状态中，任一截面的弯矩绝对值都不超过其极限弯矩，即$|M| \leq M_u$。

（3）平衡条件

在极限状态中，结构的整体或任一局部仍须维持平衡。

3．破坏载荷与接受载荷

（1）破坏载荷

破坏载荷是指满足机构条件和平衡条件的荷载，用 F^+表示。

破坏载荷不一定满足内力局限条件。

（2）可接受载荷

可接受荷载是指满足内力局限条件和平衡条件的荷载，用 F^-表示。

可接受荷载不一定满足机构条件。

极限荷载既是可破坏荷载，又是可接受荷载。

4．比例加载时有关极限荷载的几个定理

（1）极小定理

极限荷载是所有可破坏荷载中的最小者。

（2）极大定理

极限荷载是所有可接受荷载中的最大者。

（3）惟一性定理

极限荷载值只有一个确定值。

因此，若某荷载既是可破坏荷载，又是可接受荷载，则可断定该荷载即为极限荷载。

五、计算极限荷载的穷举法和试算法

1．穷举法

穷举法是指列举所有可能的各种破坏机构，由平衡条件或虚功原理求出相应的荷载，取其中最小者即为极限荷载的方法，也称机构法或机动法。

2．试算法

任选一种破坏机构，由平衡条件或虚功原理求出相应的荷载，并作出其弯矩图，若满足内力局限条件，则该荷载即为极限荷载；若不满足，则另选一机构再行试算，直至满足。

3．穷举法计算步骤

试求图 14-1-5（a）所示变截面梁的极限荷载。

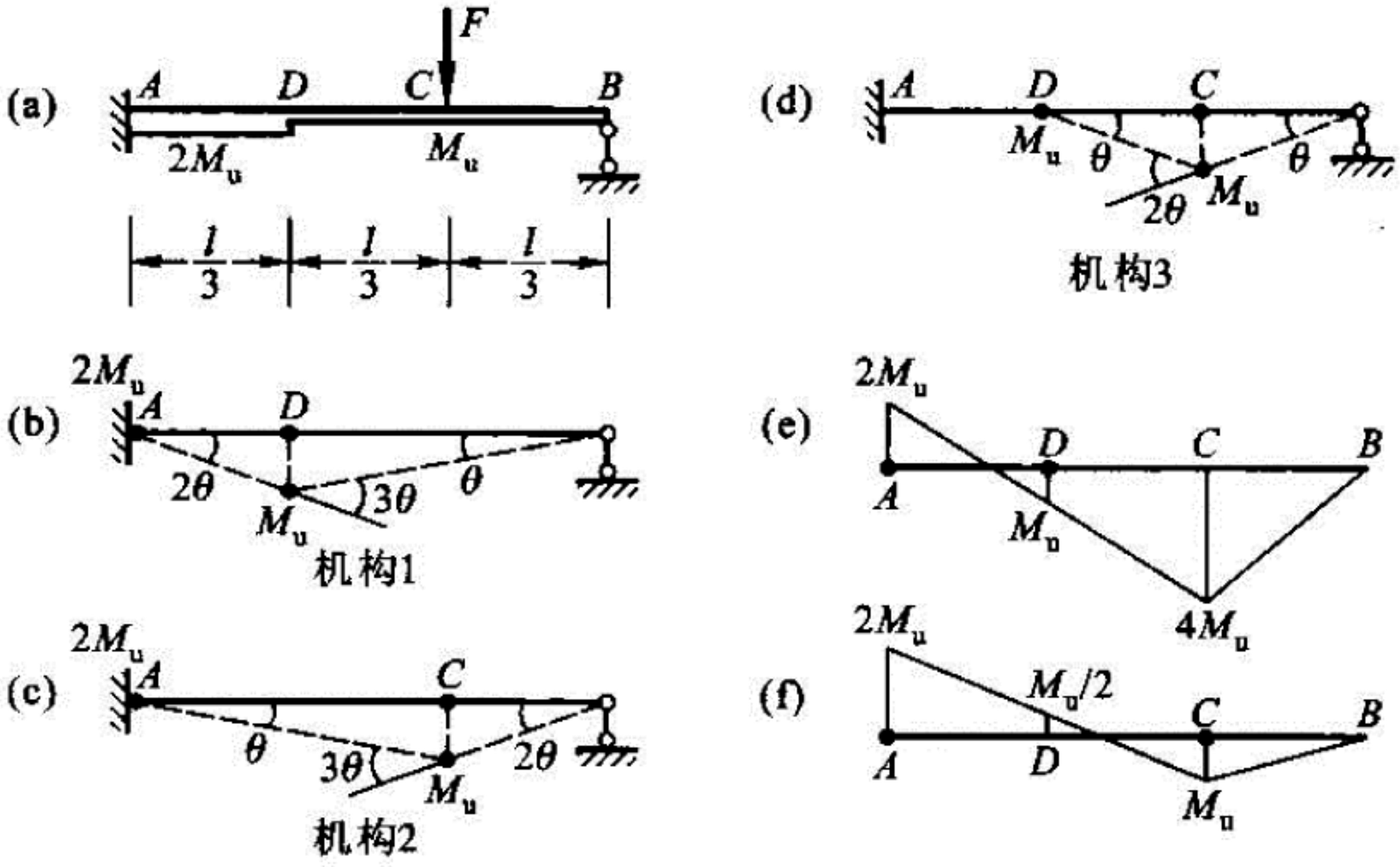


图 14-1-5

（1）确定结构所有可能的破坏结构形式

此梁出现两个塑性铰即成为破坏机构。除了最大负弯矩和最大正弯矩所在的截面 A、C 外，截面突变处 D 右侧也可能出现塑性铰。

此梁共有 3 种可能的破坏机构，如图 14-1-5（b）、（c）、（d）所示。

（2）计算破坏结构的相应载荷

①机构 1：设 A、D 处出现塑性铰（图 14-1-5（b）），由

$$F\frac{l}{3}\theta = 2M_u \times 2\theta + M_u \times 3\theta$$

得

$$F = \frac{21M_u}{l}$$

②机构 2：设 A、C 处出现塑性铰（图 14-1-5（e）），由

$$F\frac{2l}{3}\theta = 2M_u\theta + M_u \times 3\theta$$

得

$$F = \frac{7.5M_u}{l}$$

③机构 3：设 D、C 处出现塑性铰（图 14-1-5（d）），由

$$F\frac{l}{3}\theta = M_u\theta + M_u \times 2\theta$$

得

$$F = \frac{9M_u}{l}$$

（3）所有破坏结构载荷的最小值即为极限载荷

最小值为

$$F_u = \frac{7.5M_u}{l}$$

即实际的破坏机构是机构 2。

4．试算法计算步骤

试求图 14-1-5（a）所示变截面梁的极限荷载。

（1）选择机构 1（图 14-1-5（b））

①求相应载荷

载荷的计算方法与上面相同

$$F=\frac{21M_u}{l}$$

②弯矩图分析

由塑性铰 A 处的弯矩为 $2M_u$（上边受拉），D（右侧）处弯矩为 M_u（下边受拉），以及无荷区段弯矩图为直线，铰 B 处弯矩为零，便可绘出其弯矩图（图 14-1-5（e））。此时，截面 G 的弯矩已达 $4M_u$，超过了其极限弯矩 M_u，故此机构不是极限状态。

（2）选择机构 2（图 14-1-7（c））

①求相应荷载

$$F=\frac{7.5M_u}{l}$$

②弯矩分析

同理可作出其弯矩图如图 14-1-5（f）所示。可见，所有截面的弯矩均未超过其极限弯矩值，故此时的荷载为可接受荷载，因而极限荷载为

$$F_u=\frac{7.5M_u}{l}$$

六、连续梁的极限荷载

1. 连续梁的可能破坏机构形式

（1）由于某一跨出现三个塑性铰或铰支端跨出现两个塑性铰而成为破坏机构（图 14-1-6（b）、（c）和（d））。

（2）由相邻各跨联合形成破坏机构（图 14-1-6（e））。

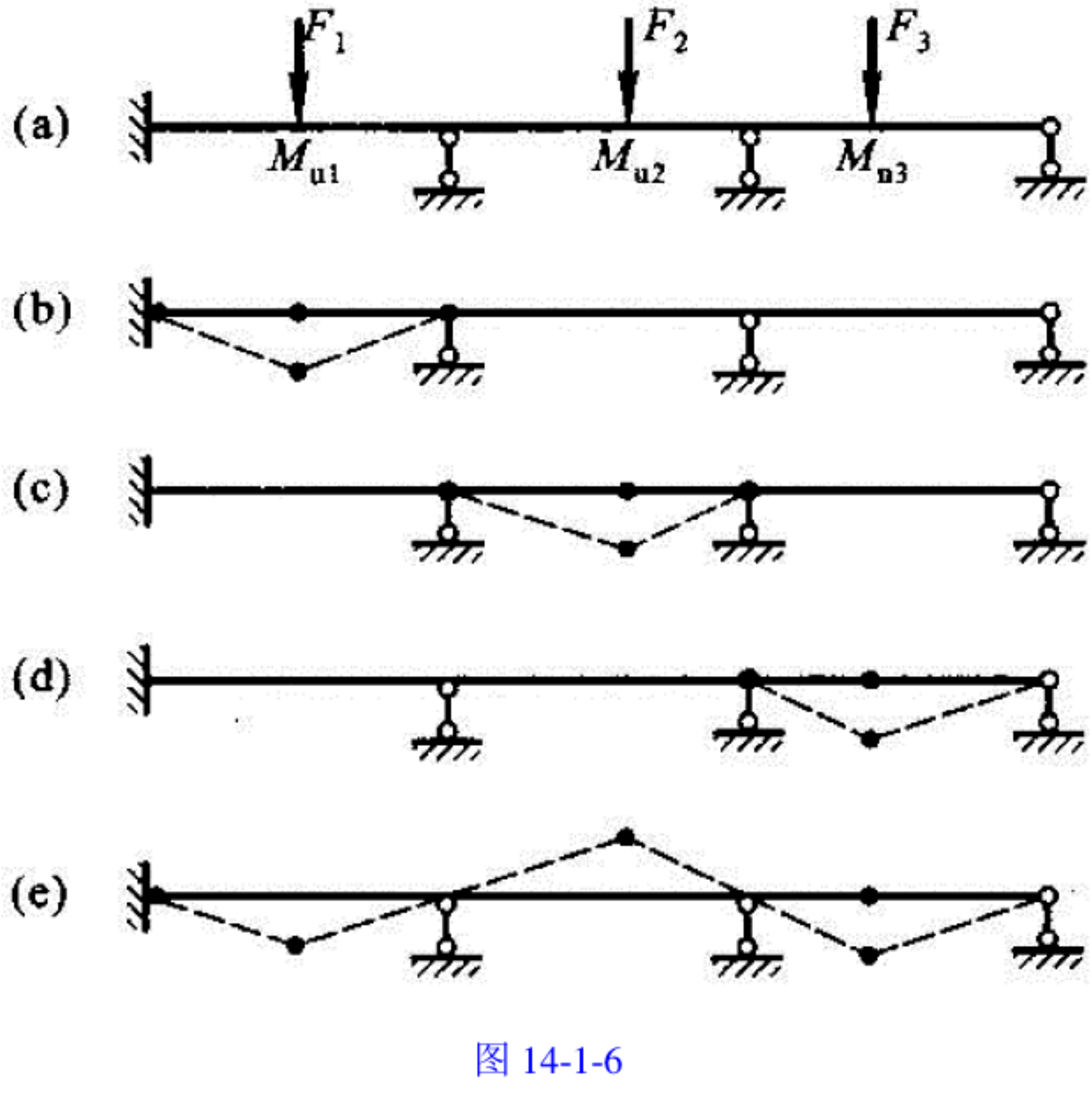


图 14-1-6

2. 极限荷载计算

（1）计算方法

当各跨分别为等截面梁，所有荷载方向均相同（通常向下）时，只可能出现某一跨单独破坏的机构。只需将各跨单独破坏时的荷载分别求出，然后取其中最小者，便是连续梁的极限荷载。

（2）计算步骤

试求图 14-1-7（a）所示连续梁的极限荷载。各跨分别为等截面的，其极限弯矩如图所示。

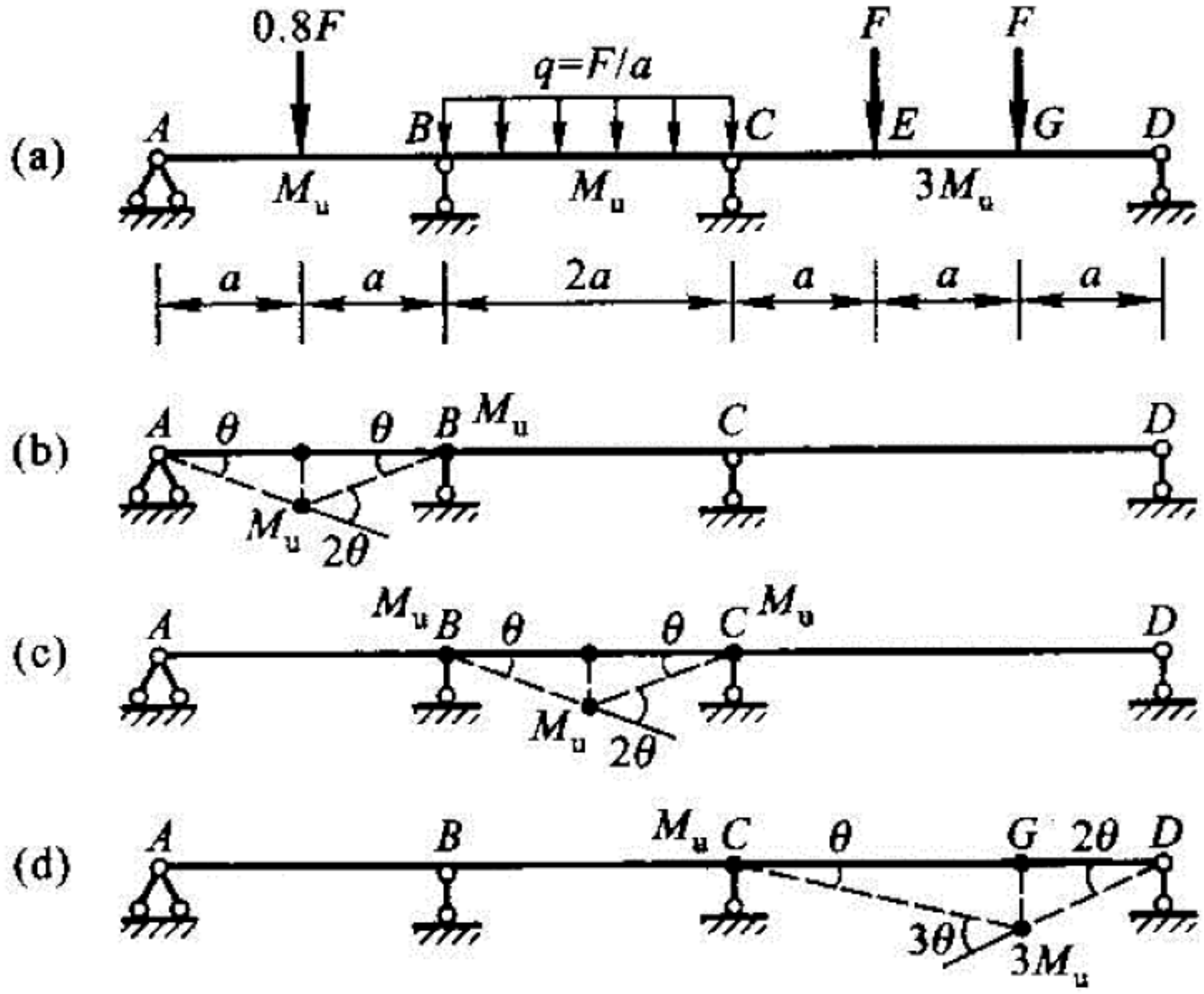


图 14-1-7

①第 1 跨机构（图 14-1-7（b））

$$0.8Fa\theta = M_u \times 2\theta + M_u\theta$$

$$F = \frac{3.75M_u}{a}$$

②第 2 跨机构（图 14-1-7（c））

由对称可知，最大正弯矩的塑性铰出现在跨度中点。

$$\frac{F}{a}\frac{2a}{2}a\theta = M_u\theta + M_u \times 2\theta + M_u\theta$$

$$F = \frac{4M_u}{a}$$

③第 3 跨机构（图 14-1-7（d））

由弯矩图形状可知最大正弯矩在截面 G 处，故塑性铰出现在 C、G 两点。

$$Fa\theta + F \times 2a\theta = M_u\theta + 3M_u \times 3\theta$$

$$F = 3.33M_u/a$$

④比较以上结果，第 3 跨的 F 最小，极限荷载为

$$F_u = 3.33M_u / a$$

七、刚架的极限荷载

1．刚架的可能破坏机构形式

如图 14-1-8（a）所示刚架，各杆分别为等截面杆。

由弯矩图的形状可知，塑性铰只可能在 A、B、C（下侧）、E（下侧）、D 五个截面处出现。但此刚架为 3 次超静定，故只要出现 4 个塑性铰或在一直杆上出现 3 个塑性铰即成为破坏机构。,此刚架的几种可能的破坏机构形式如图 14-1-8 所示。

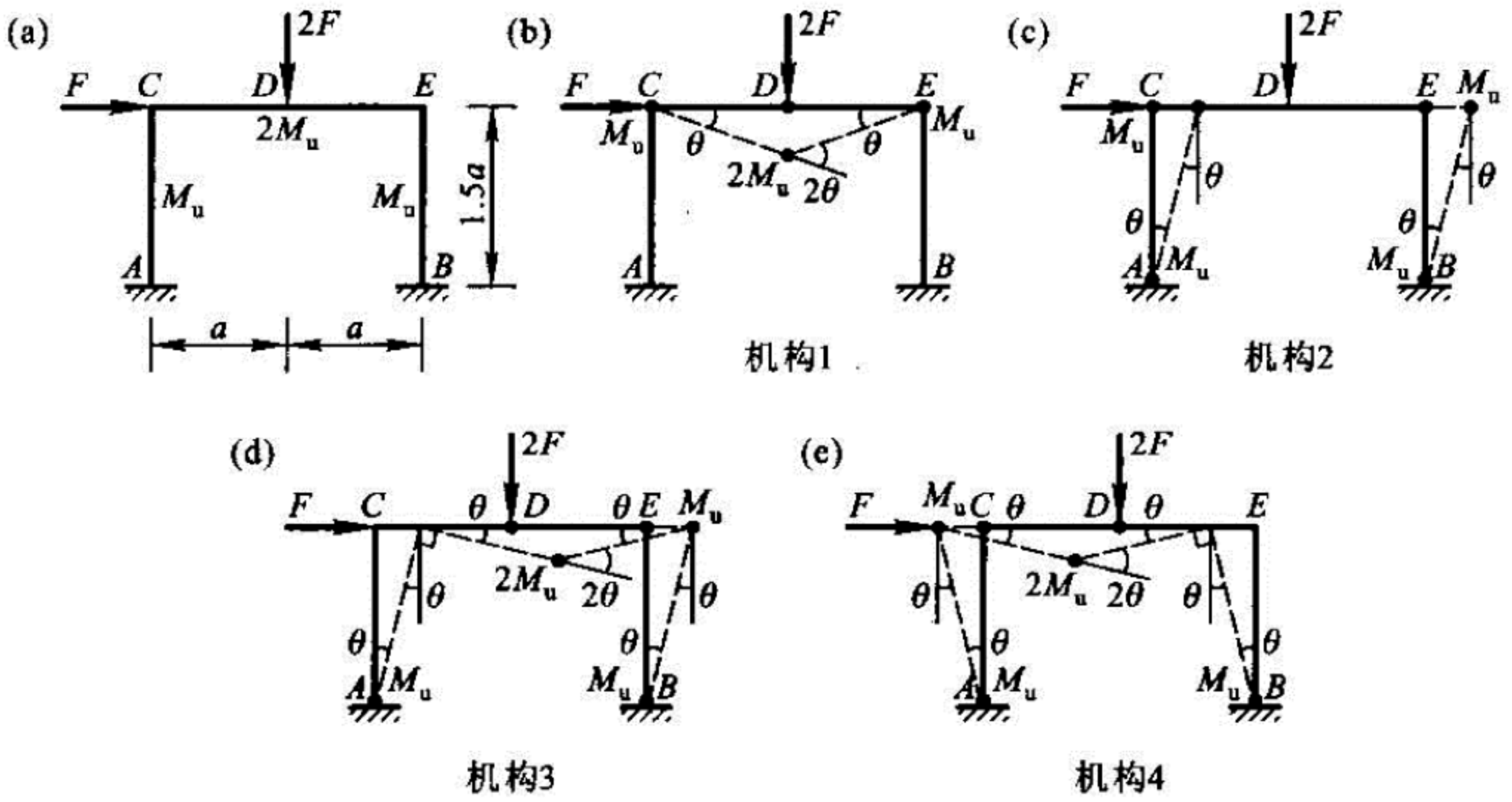


图 14-1-8

2．极限荷载计算

（1）计算方法

计算刚架极限荷载时，不考虑剪力和轴力的影响，计算方法仍是前面介绍的穷举法或试算法。

（2）用穷举法求解

①机构 1（图 14-1-8（b））

横梁上出现 3 个塑性铰而成为瞬变，其余部分仍几何不变。列出虚功方程为

$$2Fa\theta = M_u\theta + 2M_u \times 2\theta + M_u\theta$$

得

$$F = 3\frac{M_u}{a}$$

②机构 2（图 14-1-8（c））

塑性铰出现在 A、C、E、B 处，各杆仍为直线，整个刚架侧移。

$$F\times 1.5a\theta = 4M_u\theta$$

得

$$F = 2.67\frac{M_u}{a}$$

③机构 3（图 14-1-8（d））

塑性铰出现在 A、D、E、B 处，横梁转折，刚架亦侧移。注意到此时刚结点 C 处两杆夹角仍保持直角，又因位移微小，故 C 和 E 点水平位移相等。据此即可确定虚位移图中的几何关系，从而可有

$$F\times 1.5a\theta + 2Fa\theta = M_u\theta + 2M_u\times 2\theta + M_u\times 2\theta + M_u\theta$$

得

$$F = 2.29\frac{M_u}{a}$$

④机构 4（图 14-1-8（e））

机构发生虚位移时设右柱向左转动，则 D 点竖直位移向下使较大的荷载 2F 作正功。此时，刚架向左侧移，故 C 点之水平荷载 F 作负功。于是，有

$$2Fa\theta - F\times 1.5a\theta = M_u\theta + M_u\times 2\theta + 2M_u\times 2\theta + M_u\theta$$

得

$$F=16\frac{M_u}{a}$$

⑤极限载荷

上述各 F 值中按极小定理选取最小者为

$$F_u=2.29\frac{M_u}{a}$$

实际的破坏机构为机构 3。

（3）用试算法求解

①选择机构 2（图 14-1-8（e））

a．载荷计算

求出其相应的荷载为

$$F=2.67M_u/a$$

b．弯矩分析

作弯矩图，两柱的 M 图可首先绘出；横梁的 M 图用叠加法绘制（图 14-1-9（a）），可知 D 点处弯矩为

$$M_D=\frac{M_u-M_u}{2}+\frac{2F\times 2a}{4}=2.67M_u>2M_u$$

可见，不满足内力局限条件，荷载是不可承受的。

②试选机构 3（图 14-1-9（d））

a．载荷计算

求得相应荷载为

$$F=2.29M_u/a$$

b．弯矩分析

由各塑性铰处之弯矩等于极限弯矩，可绘出右柱和横梁右半段的弯矩图（图 14-1-9（b））。设结点 C 处两杆端弯矩为 M_c（内侧受拉），由横梁弯矩图的叠加法有

$$\frac{M_u-M_C}{2}+2M_u=\frac{2F\times 2a}{4}=Fa=2.29M_u$$

可得

$$M_C=0.42M_u<M_u$$

这样，便可绘出全部弯矩图，并可见满足内力局限条件。

因此，此机构即为极限状态，极限荷载为

$$F_u=2.29\frac{M_u}{a}$$

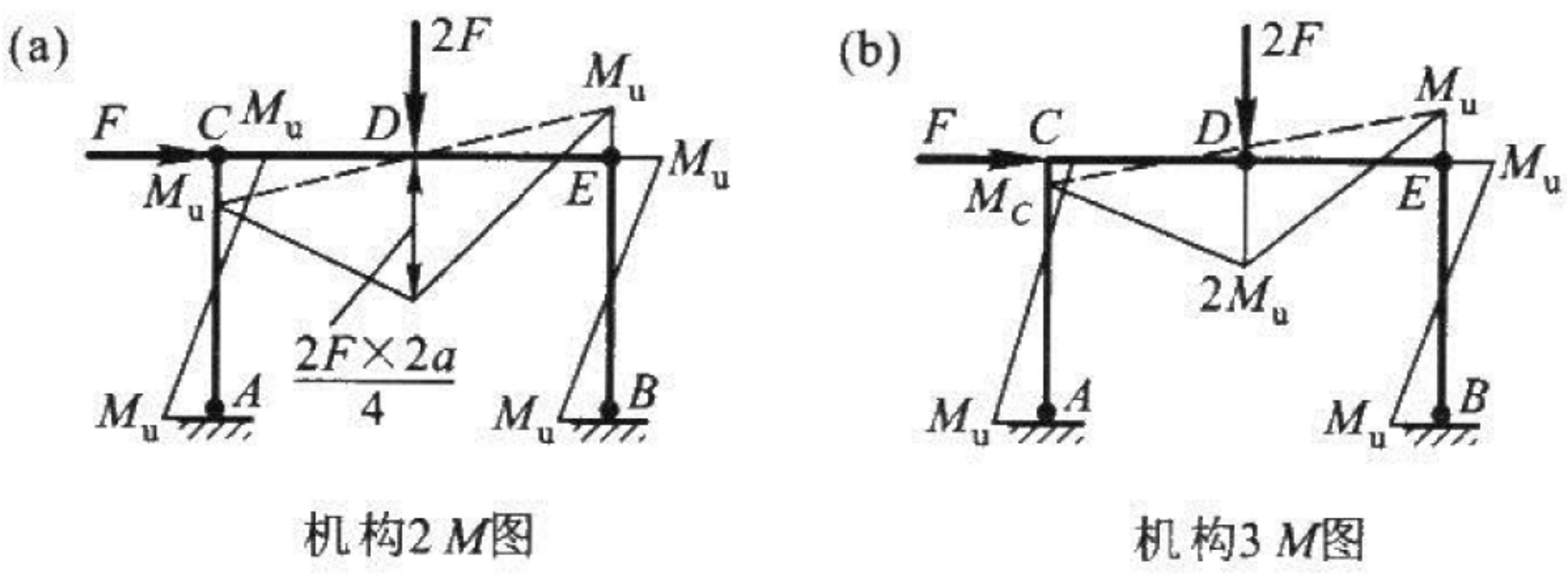


图 14-1-9

14.2 课后习题详解

复习思考题

1．什么叫极限状态和极限荷载？什么叫极限弯矩、塑性铰和破坏机构？

答：（1）极限状态和极限荷载的含义：

①极限状态是指整个结构或结构的一部分超过某一状态就不能满足设计规定的某一功能要求时所对应的特定状态；

②极限荷载是指结构在极限状态时所能承受的荷载。

（2）极限弯矩、塑性铰和破坏机构的含义：

①极限弯矩是指某一截面所能承受的弯矩的最大数值；

②塑性铰是指弯矩不能再增大，但弯曲变形则可任意增长的截面；

③破坏机构是指出现若干塑性铰而成为几何可变或瞬变体系的结构。

2．静定结构出现一个塑性铰时是否一定成为破坏机构？n 次超静定结构是否必须出现 n＋1 个塑性铰才能成为破坏机构？

答：（1）静定结构出现一个塑性铰时一定成为破坏机构。

因为根据几何组成分析，当静定结构出现一个塑性铰时，结构由几何不变变成几何可变或几何瞬变体系，此时该结构一定成为了破坏机构。

（2）n 次超静定结构不必出现 n＋1 个塑性铰才能成为破坏机构。

因为 n 次超静定结构出现 n 个塑性铰时，如果塑性铰的位置不合适，也可能使原结构变成几何瞬变的体系，此时的结构也成为了破坏机构。

3．结构处于极限状态时应满足哪些条件？

答：结构处于极限状态时应满足如下三个条件：

（1）机构条件

机构条件是指在极限状态中，结构必须出现足够数目的塑性铰而成为机构（几何可变或瞬变体系），可沿荷载作正功的方向发生单向运动。

（2）内力局限条件

内力局限条件是指在极限状态中，任一截面的弯矩绝对值都不超过其极限弯矩。

（3）平衡条件

平衡条件是指在极限状态中，结构的整体或任一局部仍维持平衡。

4．什么叫可破坏荷载和可接受荷载？它们与极限荷载的关系如何？

答：（1）可破坏荷载和可接受荷载的含义：

可破坏荷载是指满足机构条件和平衡条件的荷载（不一定满足内力局限条件）；

可接受荷载是指满足内力局限条件和平衡条件的荷载（不一定满足机构条件）。

（2）与极限荷载的关系

极限荷载是所有可破坏荷载中的最小者，是所有可接受荷载中的最大者。

习题

14-1　已知材料的屈服极限 σ_s＝240MPa。试求下列截面的极限弯矩值：（a）矩形截面 b＝50mm，h＝100mm；（b）20a 工字钢；（c）图示 T 形截面。

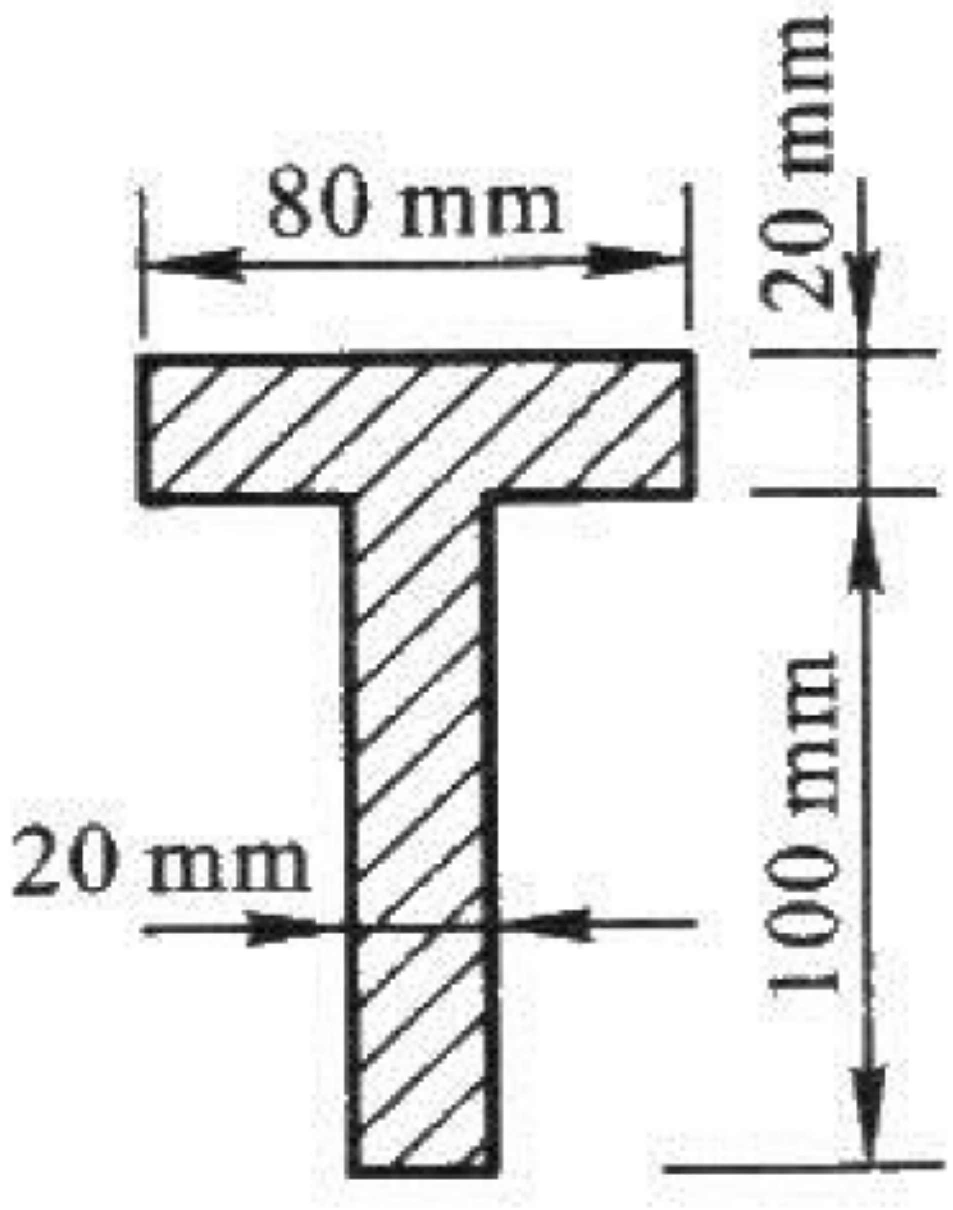


图 14-2-1（题 14-1）

解：（a）由题意知

$$M_u=\frac{bh^2}{4}\sigma_s=\frac{5\times10^{-2}\times10^4\times10^{-6}}{4}\times240\times10^6\times10^{-3}=30\text{kN}\cdot\text{m}$$

（b）查型钢表有，20a 工字钢：I_x＝2370，$I_x/s_x=17.2$

故

$$s_x=\frac{2370}{17.2}=137.8cm^3, W_s=2s_x=275.6\text{cm}^3$$

$$M_u=W_s\sigma_s=275.6\times10^{-6}\times240\times10^6\times10^{-3}=66.14\text{kN}\cdot\text{m}$$

（c）设 x 为 T 型截面的形心到翼缘板下边缘的距离，则

80×20＋20x＝20（100-x）

解得

x＝10mm

故

W_s＝80×20×20＋20×10×5＋20×90×45＝114000mm^3

则

$$M_u=W_s\sigma_s=114000\times10^{-9}\times240\times10^6\times10^{-3}=27.36\text{kN}\cdot\text{m}$$

14-2　试求图示圆形截面及圆环形截面的极限弯矩。设材料的屈服极限为 σ_s。

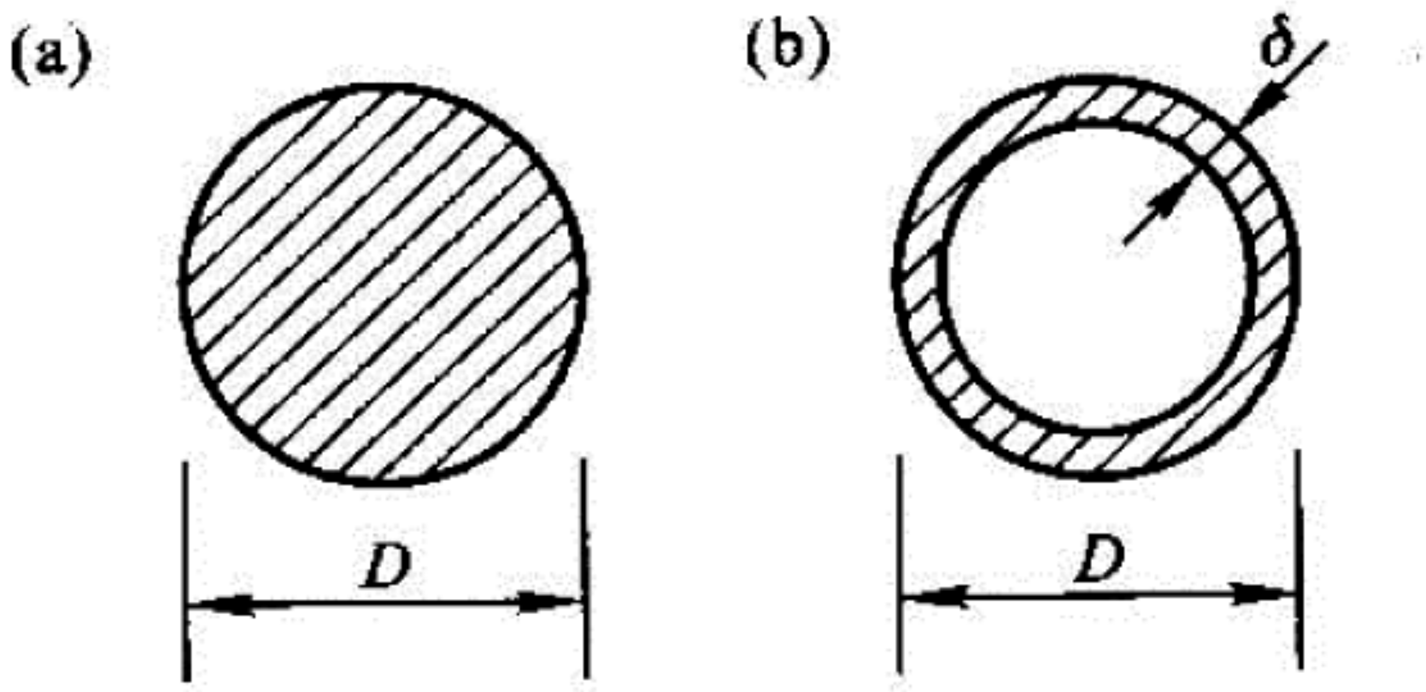


图 14-2-2（题 14-2）

解：直接代入公式得

（a）$M_u=\sigma_s W_s=\sigma_s\times 2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi D^2}{4}\times\frac{2D}{3\pi}=\sigma_s\frac{D^3}{6}$

（b）$M_u=\sigma_s\left[\frac{D^3}{6}-\frac{(D-2\delta)^3}{6}\right]=\sigma_s\frac{D^3}{6}\left[1-\left(1-\frac{2\delta}{D}\right)^3\right]$

14-3　试求等截面静定梁的极限荷载。已知 a＝2m，M_u＝300kN·m。

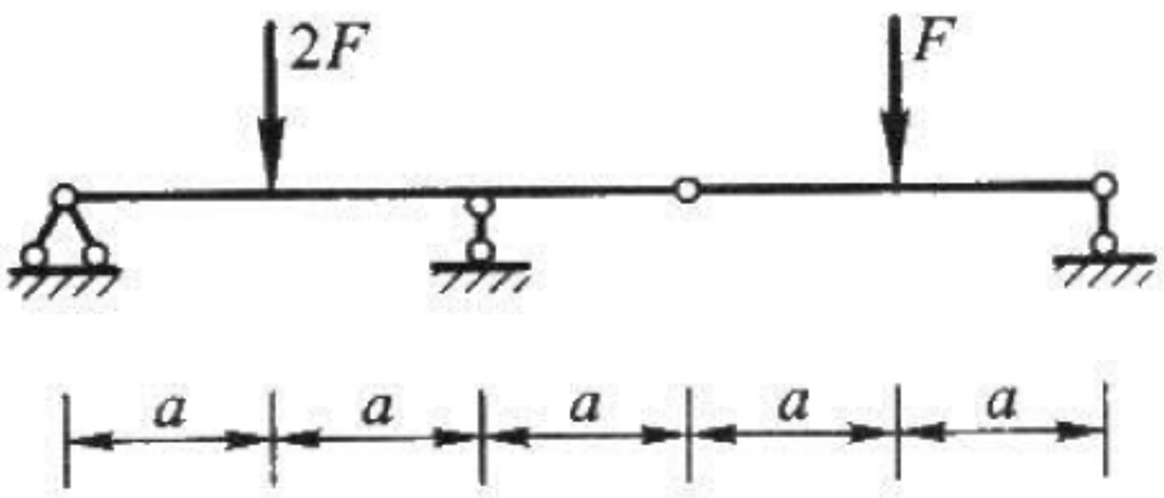


图 14-2-3（题 14-3）

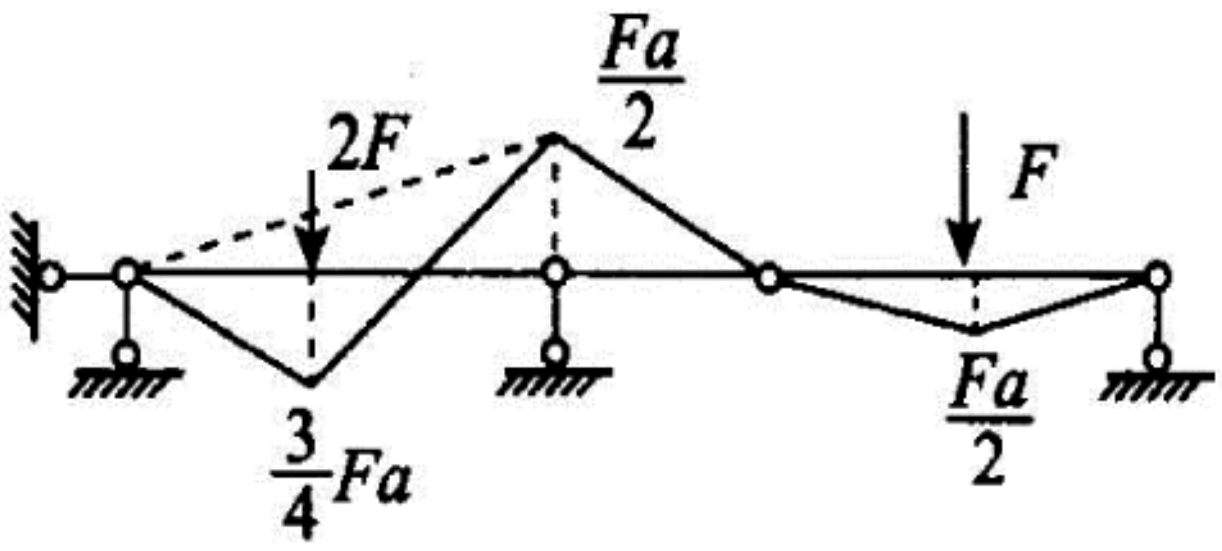


图 14-2-4

解：作出静定结构弯矩图，如图 14-2-4 所示。

由弯矩图知

$$M_u=\frac{3}{4}Fa$$

则

$$F_a=\frac{4M_u}{3a}=\frac{4\times 300}{3\times 2}=200\text{kN}$$

14-4　试求阶梯形变截面梁的极限荷载。

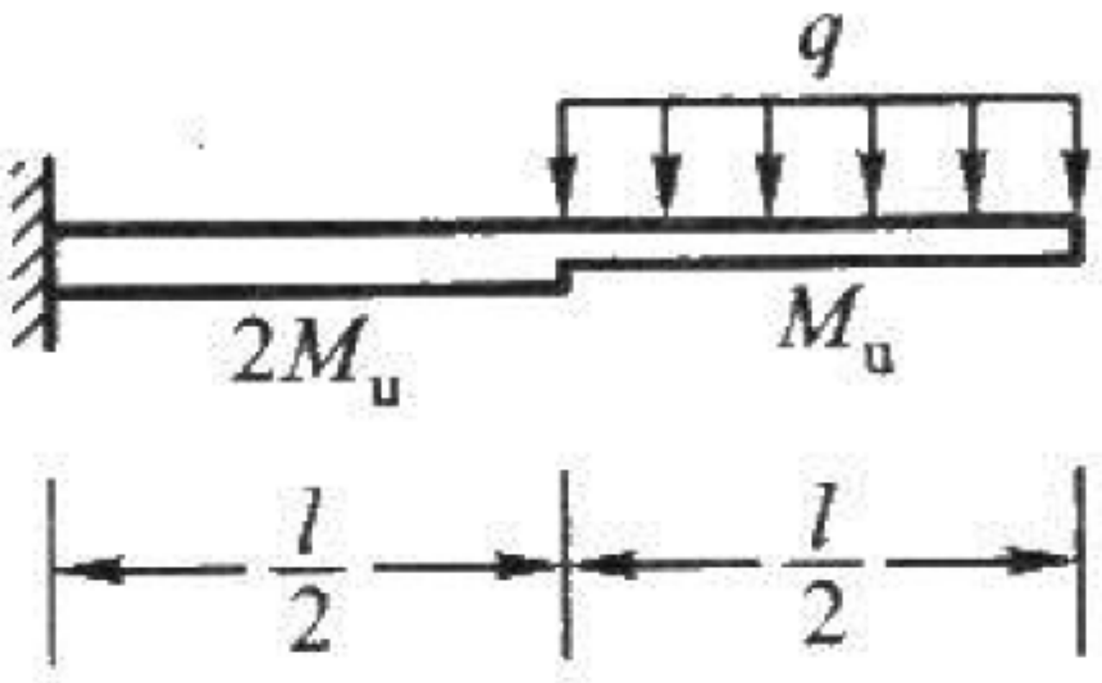


图 14-2-5（题 14-4）

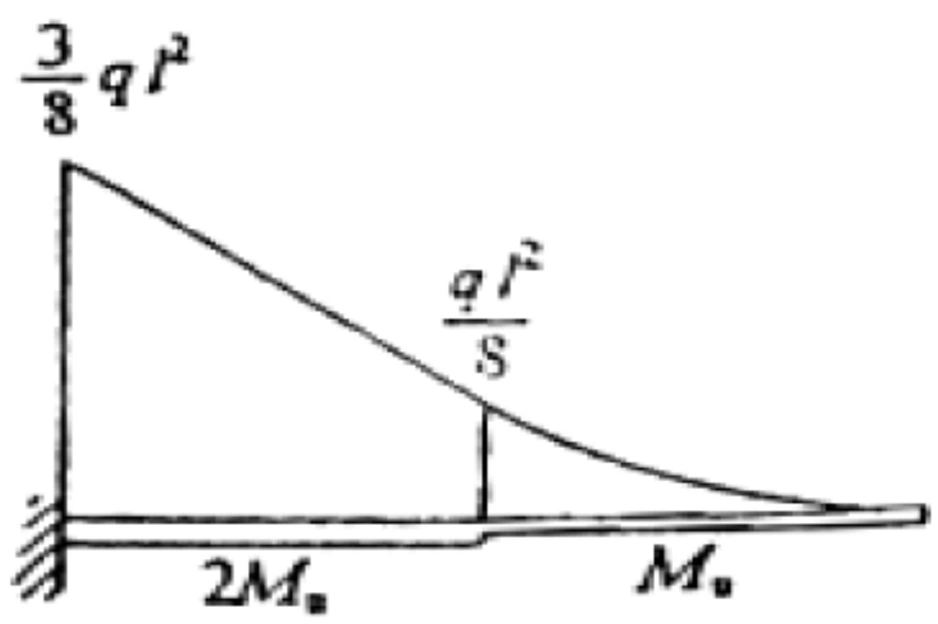


图 14-2-6

解：作出变截面梁的弯矩图，如图 14-2-6 所示。

则由弯矩图可知$2M_u=\frac{3}{8}ql^2$，则$q_u=\frac{16M_u}{3l^2}$。

14-5　试求等截面梁的极限荷载。

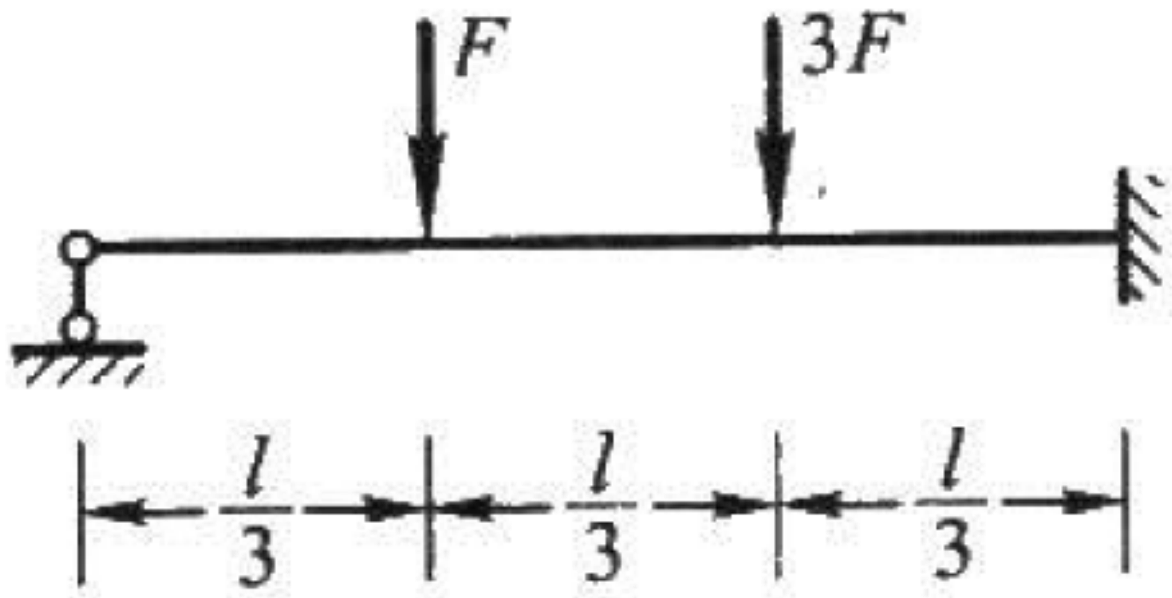


图 14-2-7（题 14-5）

解：采用穷举法，此梁为一次超静定结构，出现两个塑性铰，即形成破坏机构，而塑性铰可能出现在 B、C、D 三处，故有三种可能的机构，如图 14-2-8 所示。

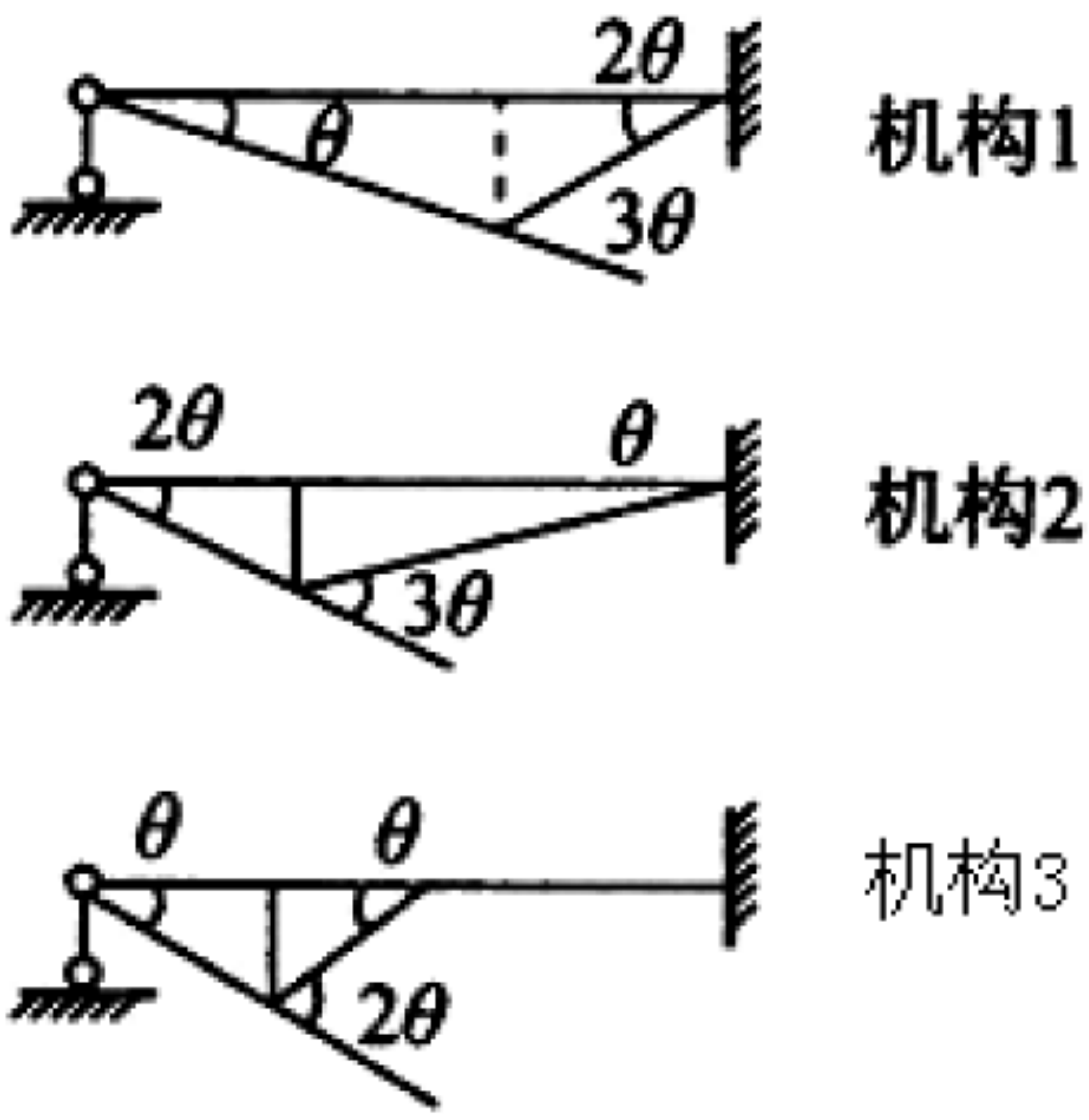


图 14-2-8

机构 1：$F\cdot\frac{l}{3}\theta+3F\cdot\frac{2l}{3}\theta=M_u(3\theta+2\theta)$，$F_u=\frac{15}{7}\frac{M_u}{l}$。

机构 2：$F\cdot\frac{2l\theta}{3}+3F\cdot\frac{l\theta}{3}=M_u(3\theta+\theta)$ ，$F_u=\frac{12}{5}\frac{M_u}{l}$。

机构 3：$F\cdot\frac{l}{3}\theta=M_u(2\theta+\theta)$，$F_u=q\frac{M_u}{l}$。

故取三种情况最小值$F_u=\frac{15}{7}\frac{M_u}{l}$（机构 1）。

14-6　试求等截面梁的极限荷载。

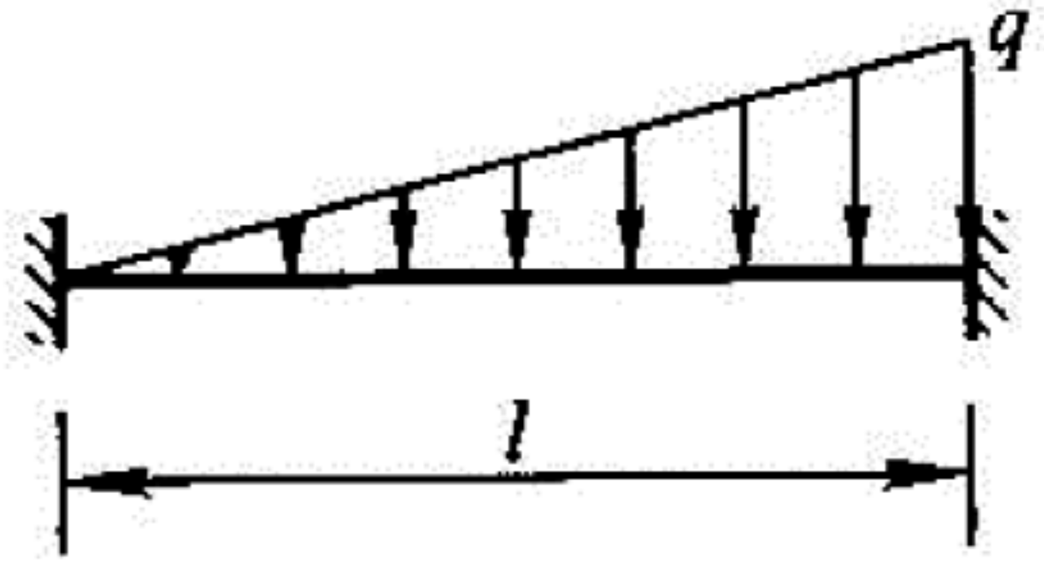


图 14-2-9（题 14-6）

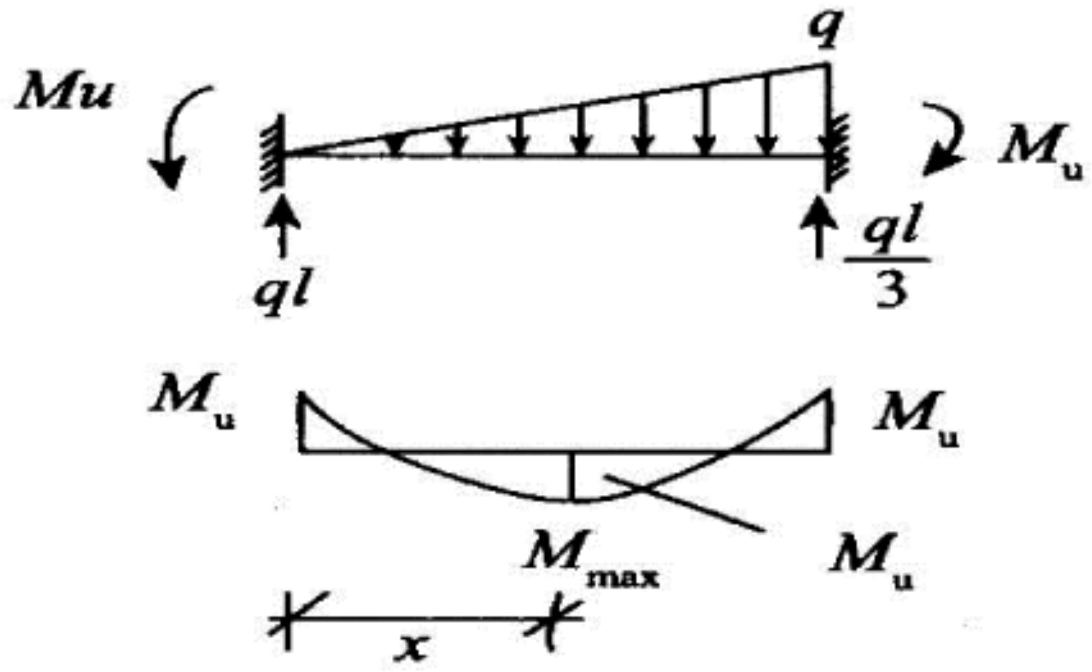


图 14-2-10

解：采用静力法。

设最大弯矩在 x 处，如图 14-2-10 所示，有

$$M_x = \frac{qlx}{6} - \frac{x}{2}\frac{xq}{l}\frac{x}{3} - M_u = \frac{qlx}{6} - \frac{qx^3}{6l} - M_u$$

由

$$Q_x = \frac{ql}{6} - \frac{qx^2}{2l} = 0$$

得

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}l = 0.577l$$

故

$$M_{max} = \frac{ql}{6}\frac{\sqrt{3}l}{3} - \frac{q}{6l}\frac{3\sqrt{3}}{27}l^3 - M_u = \frac{\sqrt{3}}{27}ql^2 - M_u$$

由

$$M_{max} = M_u，有\frac{\sqrt{3}ql^2}{27} - M_u = M_u$$

得极限荷载为

$$q_u = 18\sqrt{3}\frac{M_u}{l^2}$$

14-7　试求图示连续梁的极限荷载。

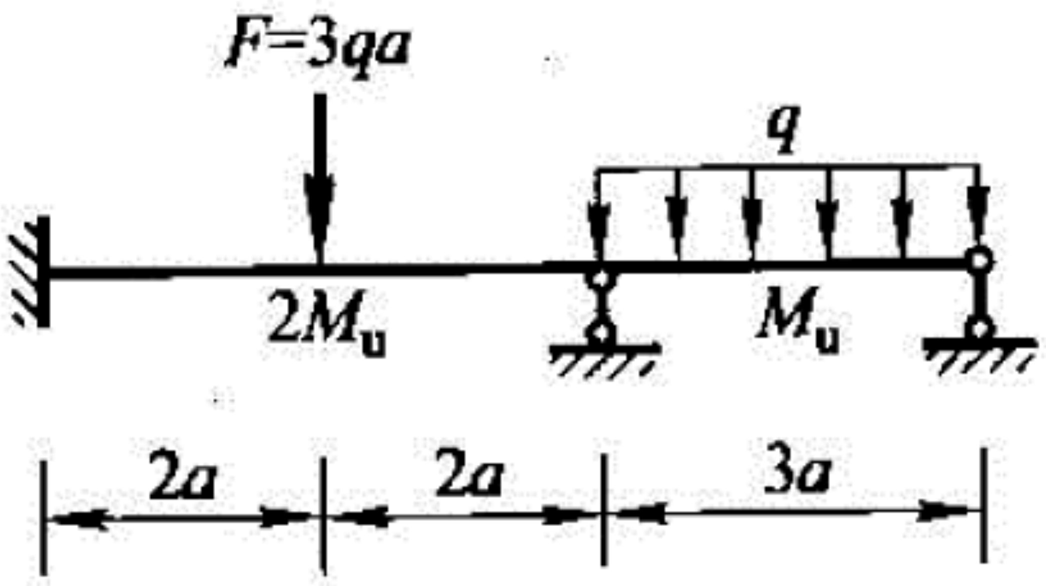


图 14-2-11（题 14-7）

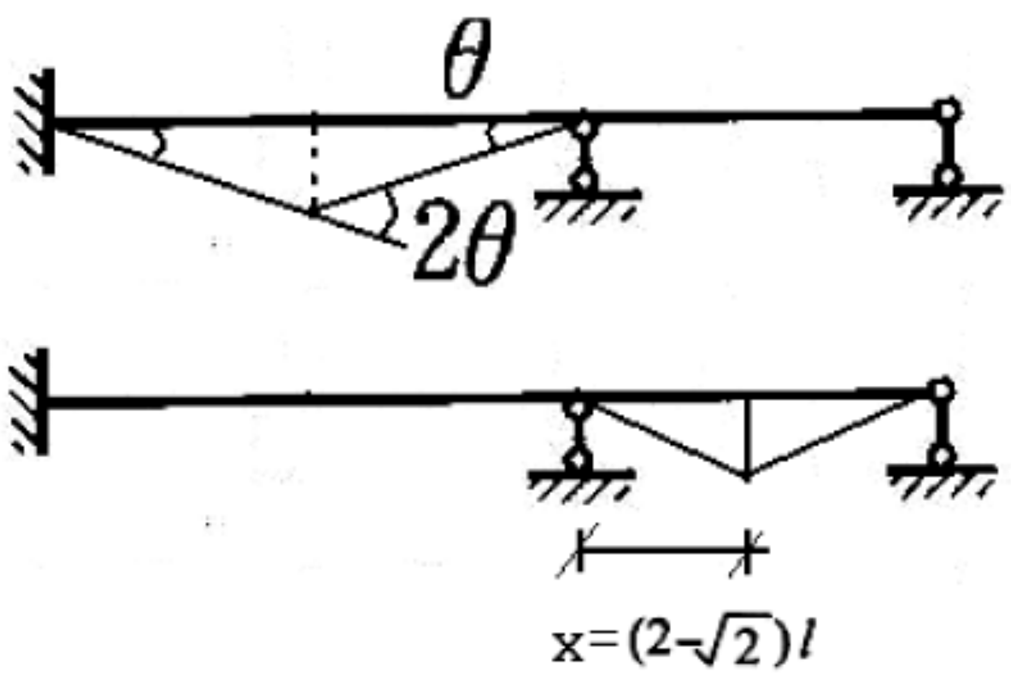


图 14-2-12

解：采用穷举法，此梁为二次超静定，作出弯矩图如图 14-2-12 所示。

对于左跨机构有

$$3qa \times 2a\theta = 2M_u\theta + 2M_u \times 2\theta + M_u\theta$$

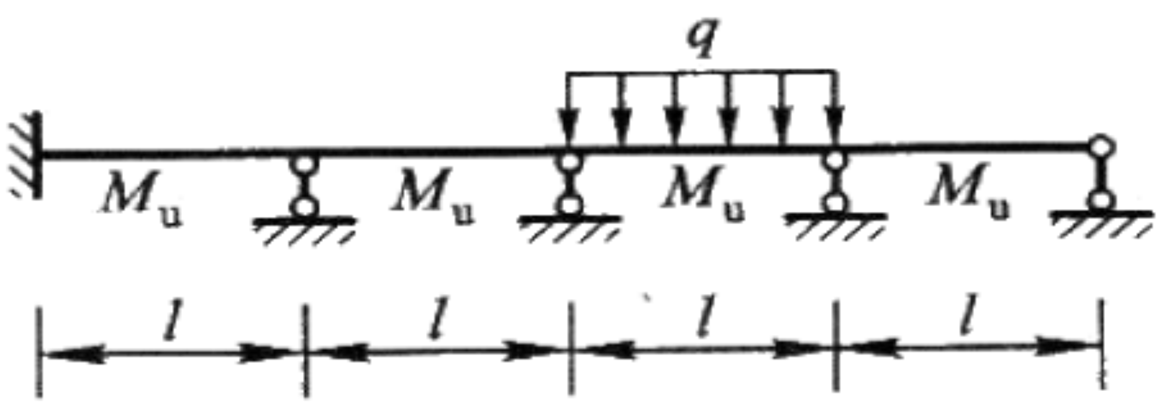
$$q = \frac{7M_u}{6a^2} = 1.167\frac{M_u}{a^2}$$

对于右跨机构有

$$q = \frac{11.66M_u}{(3a)^2} = 1.296\frac{M_u}{a^2}$$

极限荷载取最小者 $q_u = 1.167\frac{M_u}{a^2}$。

14-8　试求图示连续梁的极限荷载。



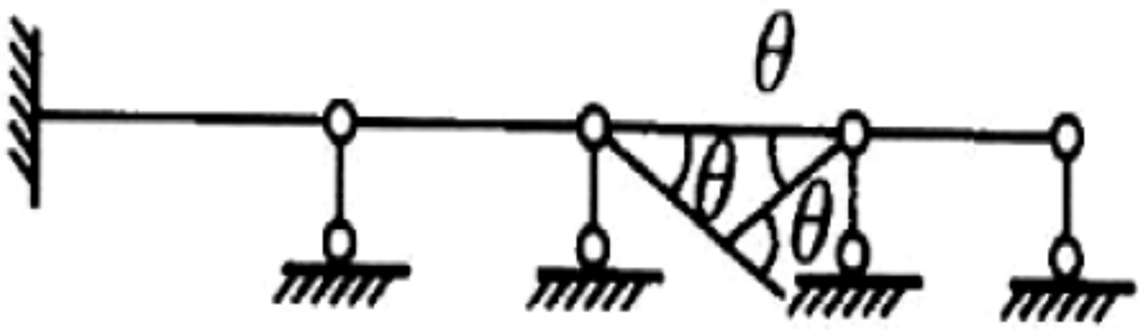


图 14-2-13（题 14-8） 图 14-2-14

解：各无荷载跨不可能单独破坏，故取第三跨机构，如图 14-2-14 所示。

由虚功法有

$$q\cdot\frac{1}{2}l_3\cdot\frac{l_3}{2}\theta=M_u(\theta+2\theta+\theta)$$

解得极限荷载

$$q_u=16\frac{M_u}{l_3^2}$$

14-9 试求图示连续梁所需的截面极限弯矩值。已知安全因数 K＝1.7，并考虑：（a）全梁为同一截面；（b）左起第 1、2 跨为同一截面，而第 3 跨为另一截面。

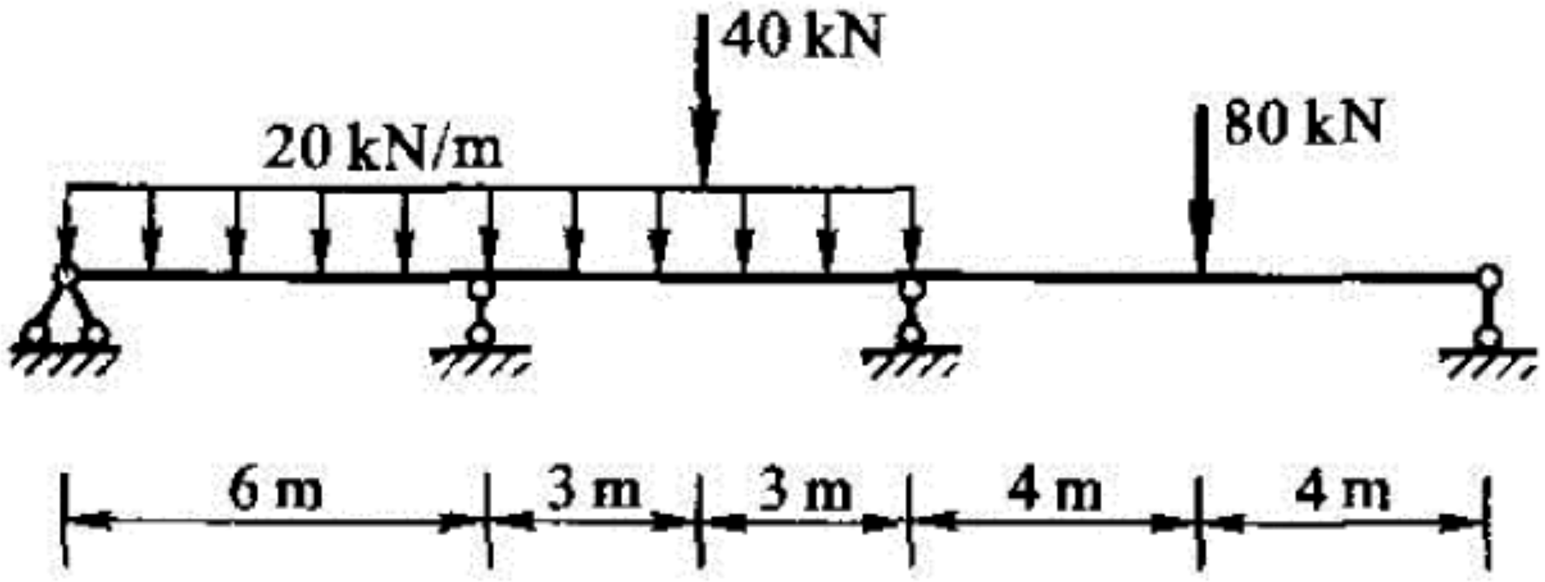


图 14-2-15（题 14-9）

解：（a）对于第 1 跨有

$$q=\frac{11.66M_u}{l^2},M_u=\frac{ql^2}{11.66}=\frac{20\times6^2}{11.66}=61.75\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

对于第 2 跨有

$$\frac{ql^2}{8}+\frac{Fl}{4}=2M_u$$

$$M_u=\frac{ql^2}{16}+\frac{Fl}{8}=\frac{20\times6^2}{16}+\frac{40\times6}{8}=75\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

对于第 3 跨有

$$\frac{Fl}{4}=\frac{M_u}{2}+M_u$$

$$M_u=\frac{Fl}{6}=\frac{80\times8}{6}=106.7\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

选择最大，并考虑安全系数 K 极限荷载为

$$M_u=1.7\times106.7=181.4\text{kN}\cdot\text{m}$$

对于第 1 跨、第 2 跨、第 3 跨的示意图如图 14-2-16 所示。

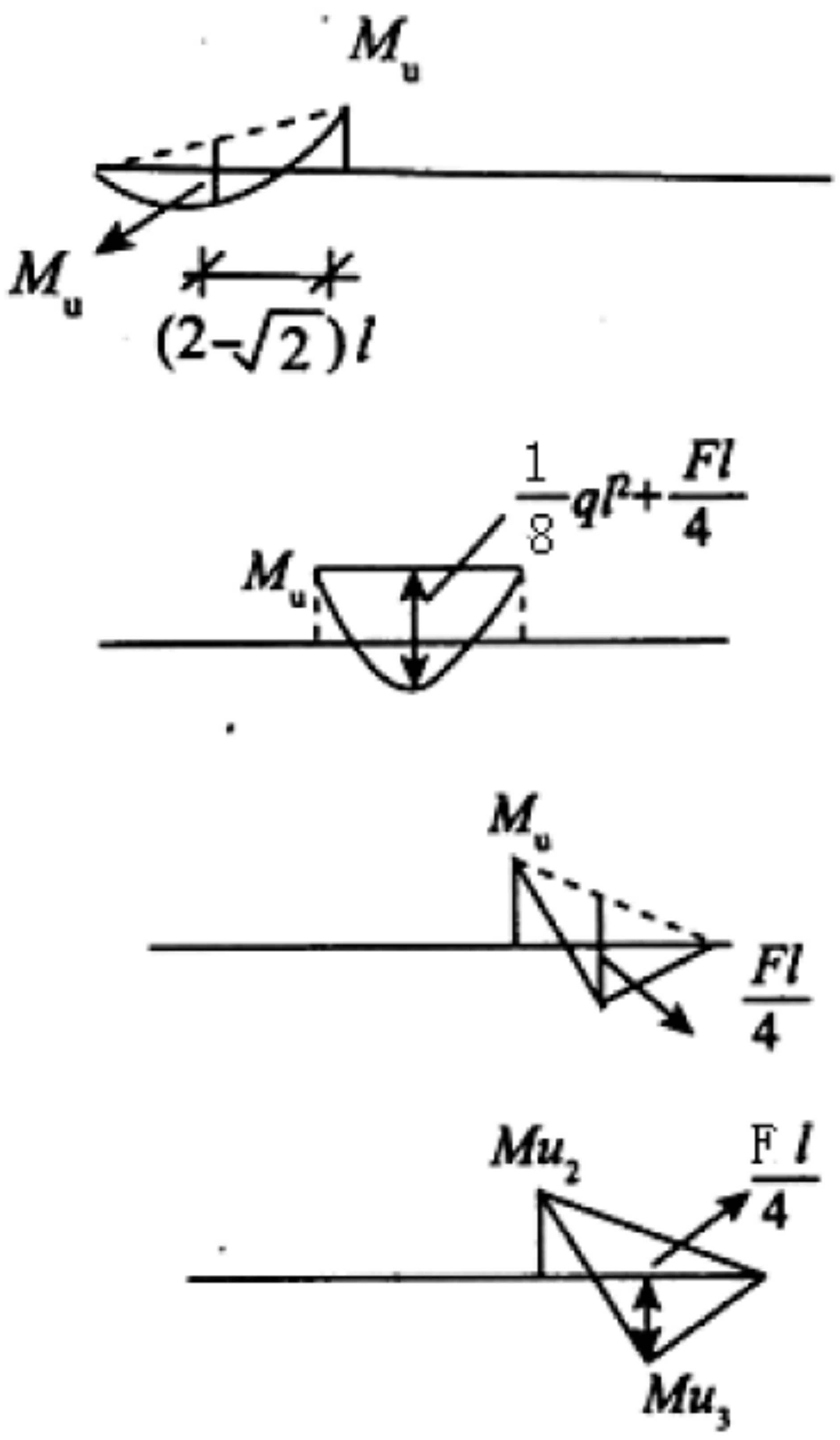


图 14-2-16

（b）设第 1、2 跨截面小于第 3 跨第 1、2 跨由（a）可知

$$M_{u1,2}=1.7\times75=127.5\text{kN}\cdot\text{m}$$

对于第 3 跨如图 14-2-16 所示，有如下关系式

$$\frac{Fl}{4}=\frac{M_{u2}}{2}+M_{u3}$$

$$M_{u3}=\frac{80\times8}{4}-\frac{75}{2}=160-37.5=122.5\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

故 $M_{u3}=1.7\times122.5=208.3\text{kN}\cdot\text{m}$。

14-10　试求图示刚架的极限荷载。

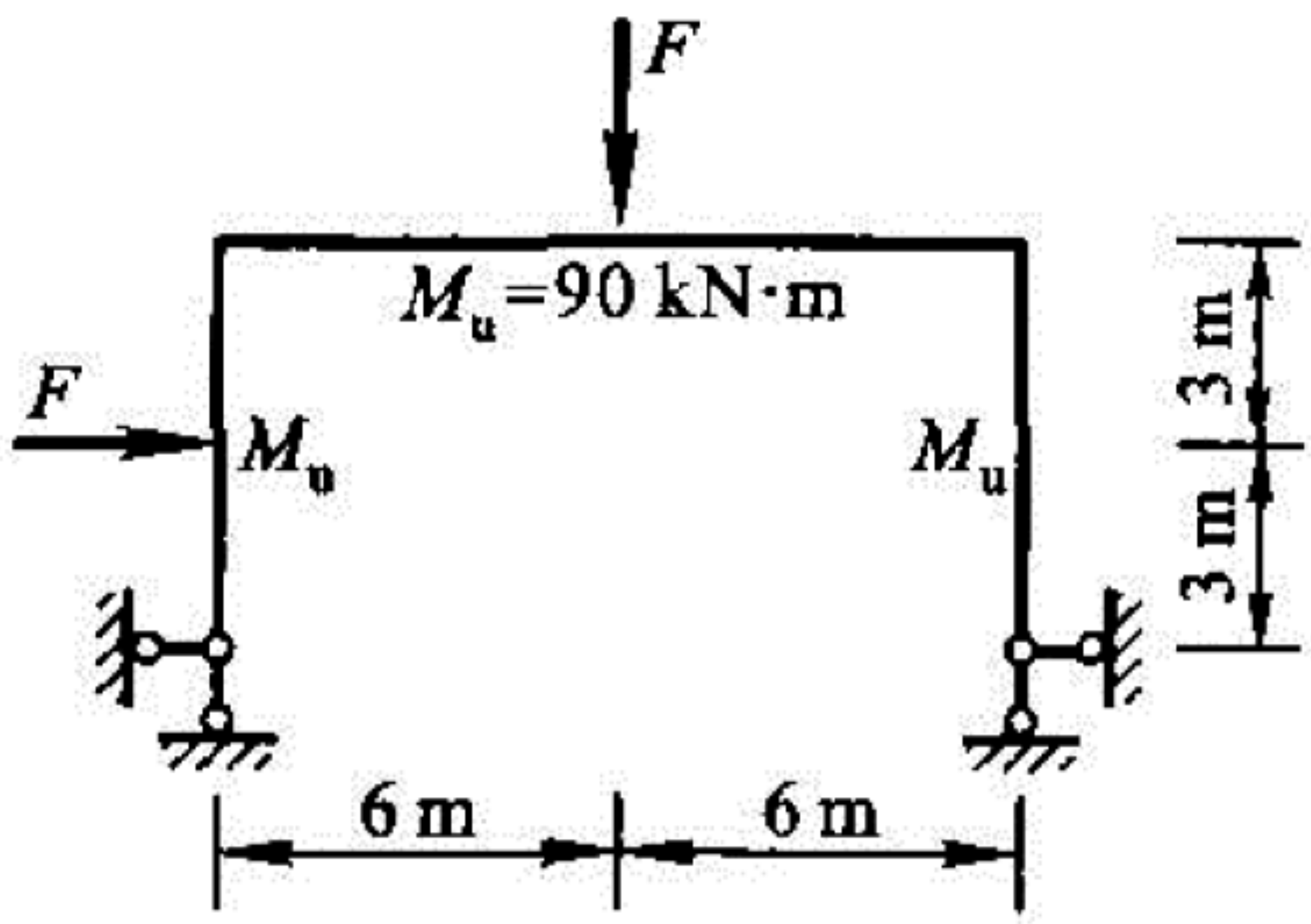


图 14-2-17（题 14-10）

解：本题为一次超静定，出现两个塑性铰即形成破坏机构，而塑性铰可能出现在 A、B、C、D 处，故需考虑 6 种可能的机构，采用穷举法如图 14-2-18 所示。

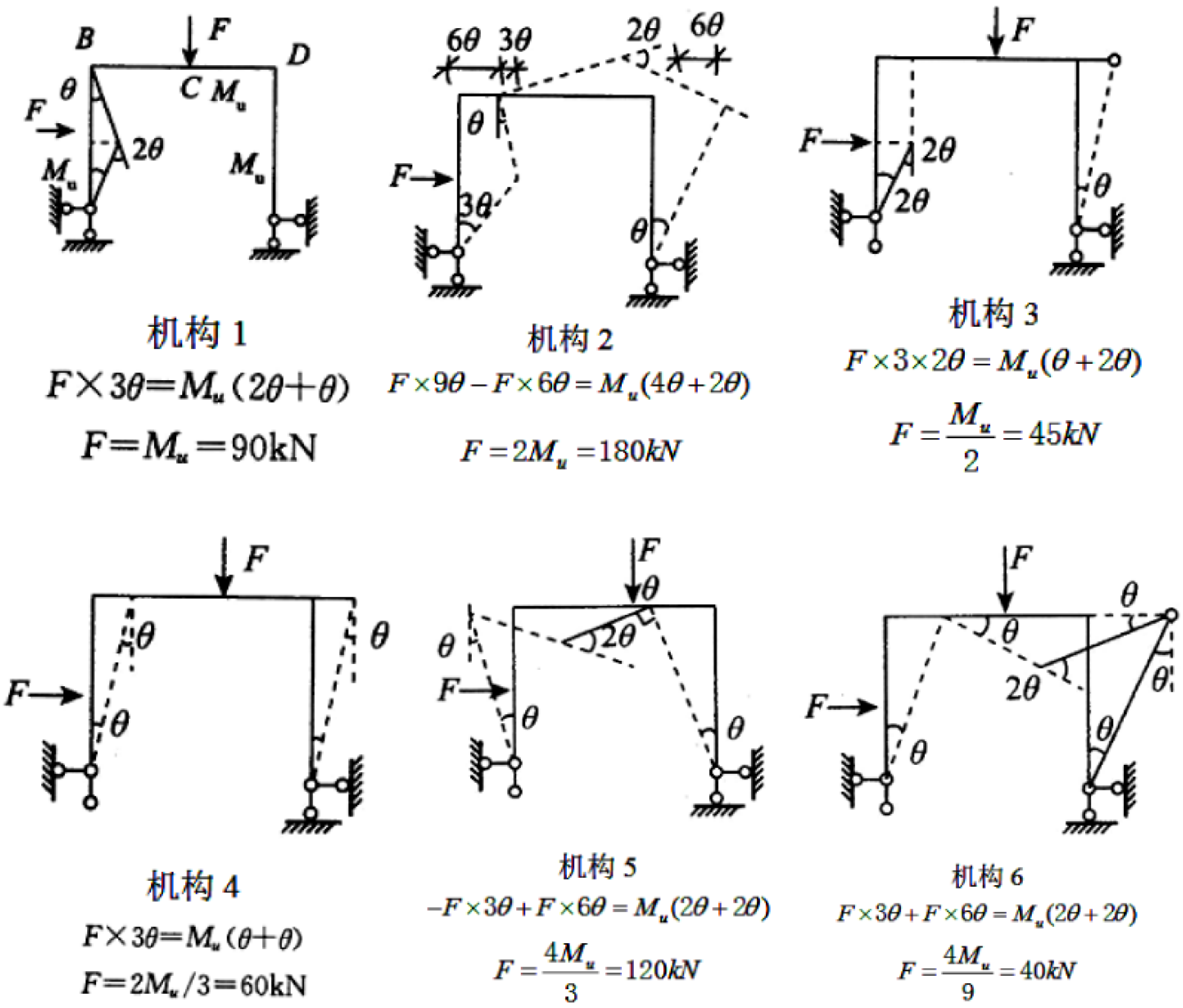
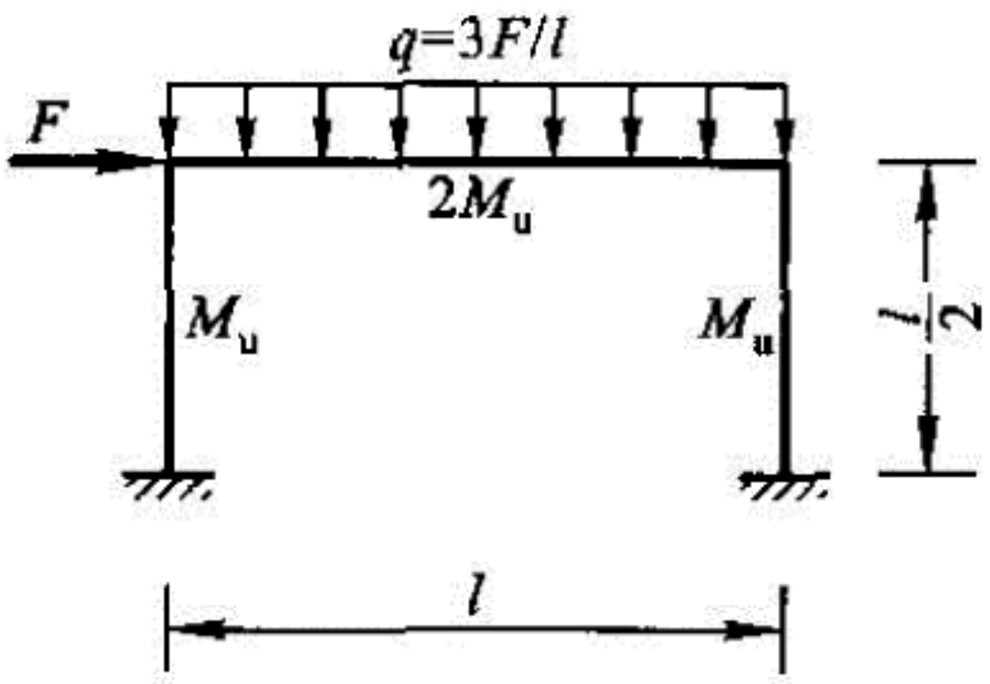


图 14-2-18

综合上述的 6 种机构，选最小值即为极限荷载如下

$$F_u=\frac{4}{9}M_u=40\text{kN}(\text{机构 }6)$$

14-11　试求图示刚架的极限荷载。



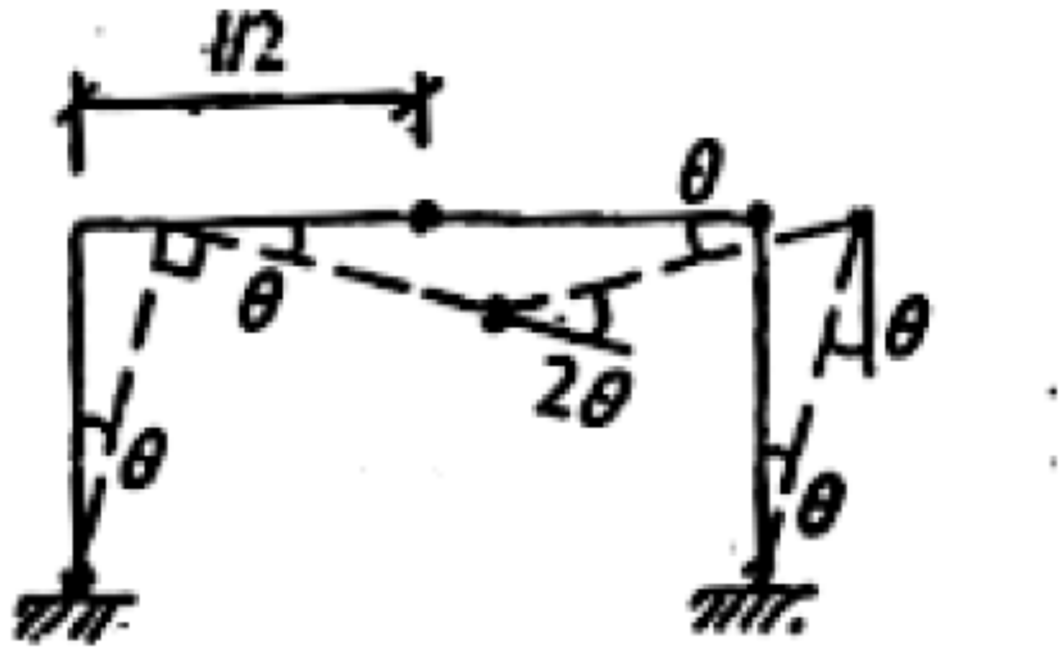


图 14-2-19（题 14-11）　　　　图 14-2-20

解：本题是 3 次超静定。两柱杆身无荷载，故不会各自出现 3 个塑性铰而形成“梁机构”。于是只剩下横梁上出现了 3 个塑性铰的“梁机构”和 4 个塑性铰内“侧移机构”及联合机构。

用试算法，取图 14-2-20 所示 4 个塑性铰的“联合机构”，横梁中部的塑性铰位置近似取在跨度中点有

$$F\cdot\frac{l}{2}\theta+\frac{3F}{l}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{\theta}{2}=M_u\theta+2M_u\cdot2\theta+M_u2\theta+M_u\theta$$

解得

$$F=\frac{32}{5}\frac{M_u}{l}=6.4\frac{M_u}{l}$$

作 M 图，如图 14-2-21(a)所示，可见横梁中点稍在处有最大正弯矩，它仅略大于 $2M_u$，故可近似认为 $F_u\approx6.4M_u/l$。

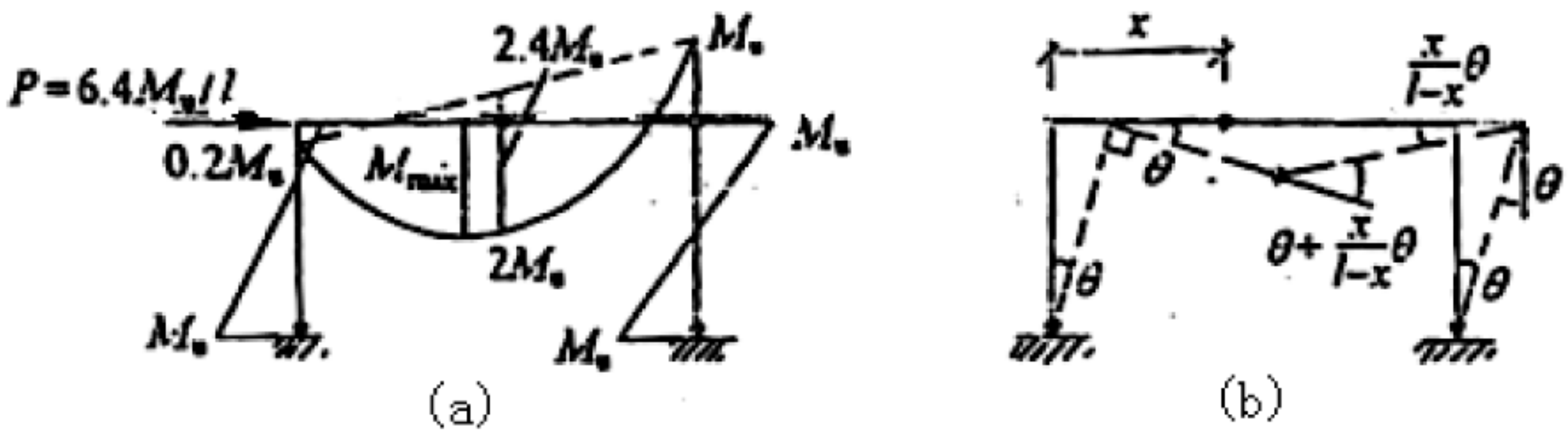


图 14-2-21

精确解（*注）：设横梁中部塑性铰在 x 处（图 14-2-21（b）），有

$$F\cdot\frac{1}{2}\theta+\frac{3F}{l}\frac{l}{2}\times\theta=M_u\theta+2M_u\left(\theta+\frac{x}{l-x}\theta\right)+M_u\left(\theta+\frac{x}{l-x}\theta\right)+M_u\theta$$

化简得

$$F=\frac{4+\dfrac{6l}{l-x}}{l+3x}M_u$$

由

$$\frac{dF}{dx}=\frac{1}{(l+3x)^2}\left[(l+3x)\frac{-6l(-1)}{(l-x)^2}-\left(4+\frac{6l}{l-x}\right)3\right]M_u=0$$

化简得

$$x^2-5xl+2l^2=0$$

解得

$$x=0.43845l$$

则极限荷载为 $F_u=6.342M_u/l$。

*注：这里所谓“精确”仍未计算轴力和剪力对极限弯矩的影响，故仍是近似的。

14.3　名校考研真题详解

选择题

下列有关超静定结构极限荷载 F_{Pu} 的说法，只有（　　）是正确的。[浙江大学 2006 研]

A．F_{P_u} 的计算不仅要考虑最后的平衡条件，还应考虑结构弹塑性的发展过程；

B．F_{P_u} 的计算除考虑平衡条件外，还需考虑温度的改变、支座移动等因素的影响；

C．F_{P_u} 的计算只需考虑最后的平衡条件；

D．F_{P_u} 的计算需同时考虑平衡条件和变形协调条件。

【答案】C

【解析】求解超静定结构极限荷载 F_{Pu}，利用机动法时，只需要知道最后破坏机构来列出平衡方程即可；与结构的弹塑性发展过程、温度改变、支座移动等因素无关；最终求解的是平衡方程，不需要考虑变形协调条件。

第 15 章　悬索计算

15.1　复习笔记

【知识框架】

- 悬索计算
  - 悬索的基本概念
    - 悬索的概述
    - 悬索的特点
    - 悬索的优点
  - 集中荷载作用下的单根悬索计算
    - 计算模型的特点
    - 索端张力的计算
  - 分布荷载作用下的单根悬索的计算
    - 平衡微分方程的建立
    - 常见分布荷载作用下平衡微分方程的解
    - 任意分布荷载作用下平衡微分方程的解：梁比拟法
    - 悬索长度的计算
  - 悬索的变形协调方程及初态终态问题求解
    - 悬索实际计算问题的一般模式
    - 悬索的变形协调方程
    - 单根悬索初态终态问题的求解
  - 悬索体系的计算
    - 计算方法的描述——位移法
    - 位移法的基本假定
    - 位移法的典型方程
    - 位移法典型方程的求解步骤

【重点难点归纳】

一、悬索的基本概念

1．悬索的概述

悬索是悬索结构中的主要承重构件，一般采用高强度钢材制成。

2．悬索的特点

（1）基本特征

悬索是柔性构件。悬索的基本特征是其几何形状的可变性，即几何形状随所受荷载不同而变化，位移与外荷之间的关系呈非线性且变形较大。

（2）受力特点

悬索在荷载等外因作用下只产生轴向拉力，不产生弯矩、剪力和压力。

（3）结构分析特点

与杆件结构不同，在悬索的分析中，是按照变形后的几何形状和尺寸来建立平衡方程、求解内力及对应的几何形状及位置。

3．悬索的优点

悬索能充分利用高强度钢材的优点，大大减轻结构自重，可以较经济地跨越很大的跨度。

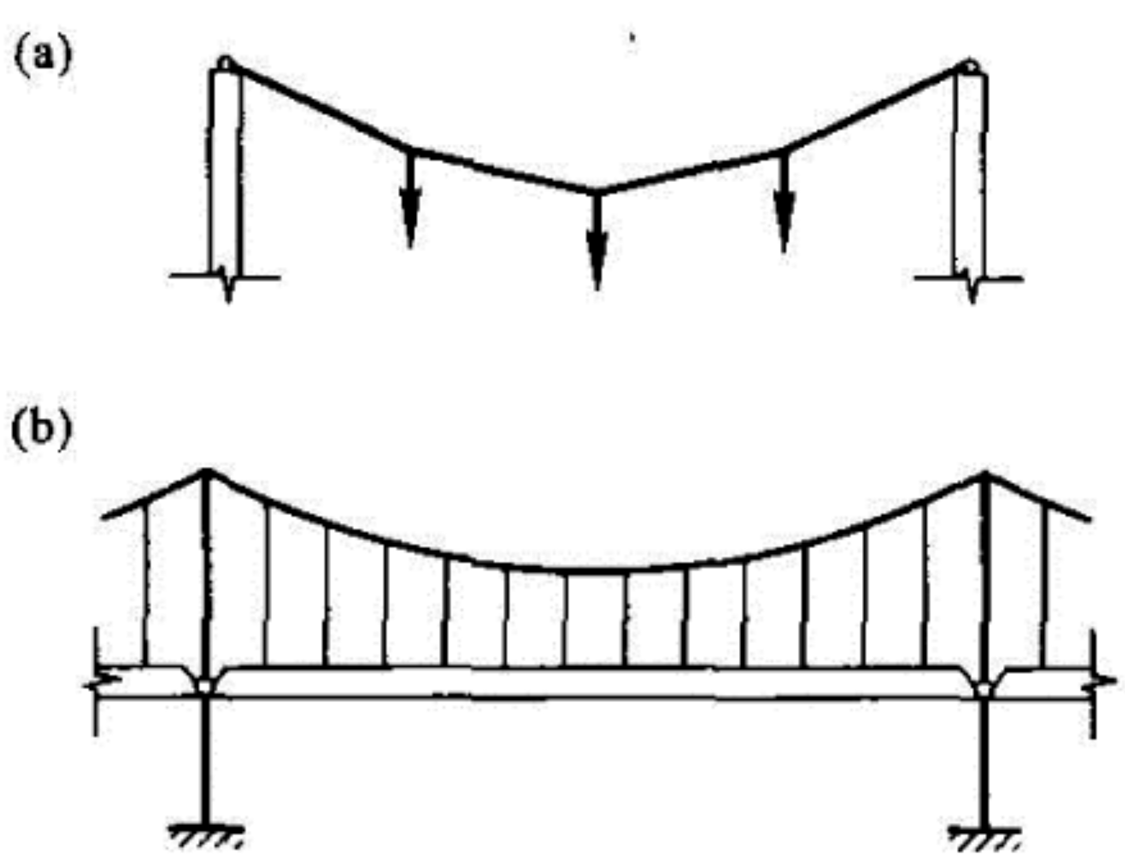


图 15-1-1

二、集中荷载作用下的单根悬索计算

1．计算模型特点

在计算中可忽略自重影响，将各索段视为直线。

2．索端张力的计算

设悬索 AB 在竖向集中荷载 F_1，F_2，…，F_n 作用下的计算简图如图 15-1-2（a）所示，图 15-1-2（b）为其相应简支梁。

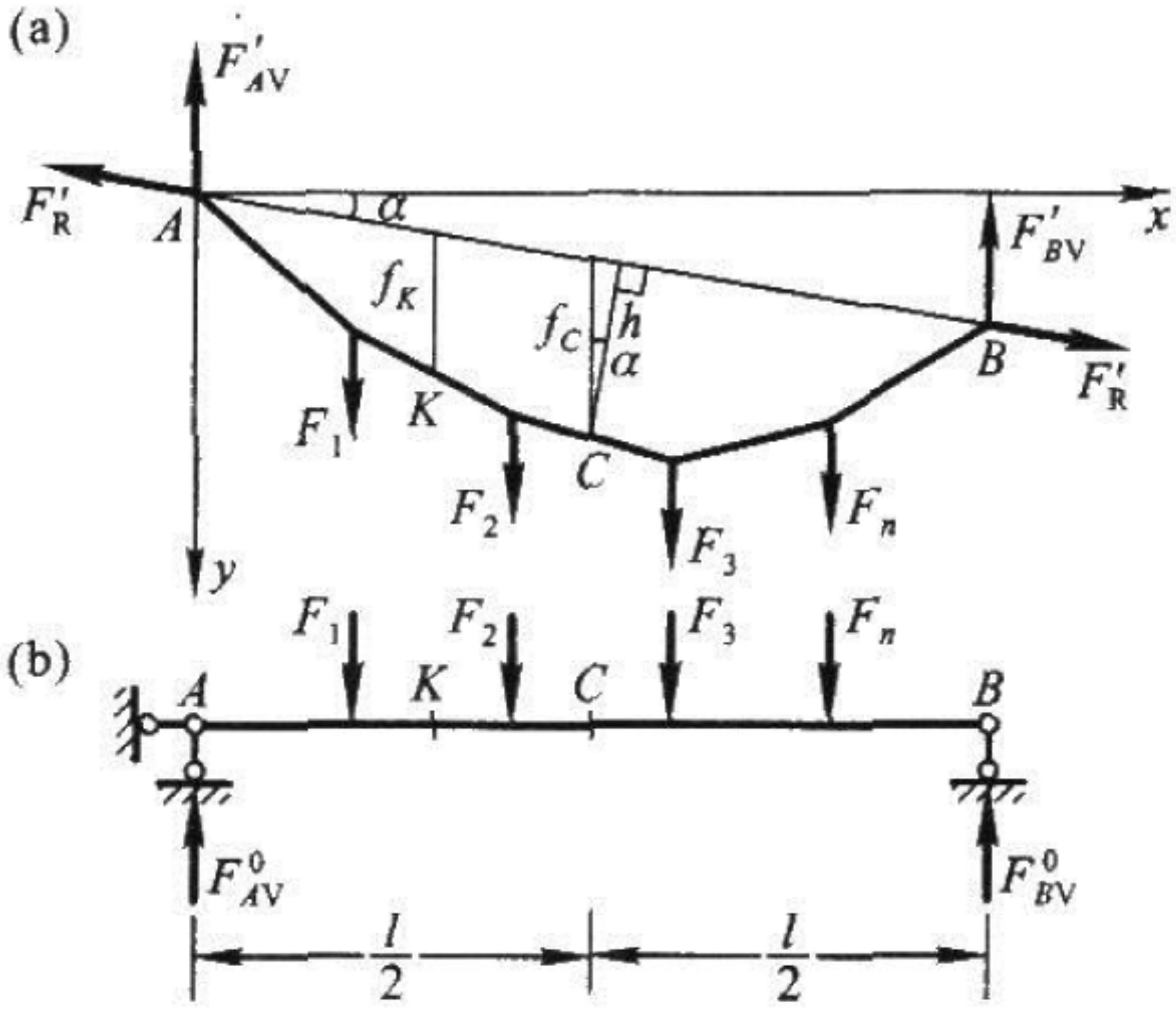


图 15-1-2

（1）索端张力沿竖向及弦 AB 方向分解

$$F'_{AV}=F^0_{AV},\quad F'_{BV}=F^0_{BV},\quad F'_R=\frac{M^0_C}{h}$$

式中，F^0_{AV}、F^0_{BV} 为相应简支梁支座反力；M^0_C 为相应简支梁跨中截面弯矩；h 为悬索跨度中点到弦 AB 的垂直距离。

（2）索端张力的水平分量 F_H 与竖向分量 F_{AV}、F_{BV}

$$\left.\begin{aligned}F_H&=F'_R\cos\alpha=\frac{M^0_C}{f_C}\\F_{AV}&=F^0_{AV}+F_H\tan\alpha\\F_{BV}&=F^0_{BV}-F_H\tan\alpha\end{aligned}\right\}$$

式中，f_C为悬索跨度中点 C 到弦 AB 的竖直距离。

若给定了悬索中任一点 K 到弦 AB 的竖直距离f_K，索中张力的水平分量为

$$F_H=\frac{M^0_K}{f_K}$$

式中，M^0_K 为相应简支梁 K 截面的弯矩。

F_H 在各索段中为一常数，各索段的张力即可由各集中力作用点的平衡方程求得，并可确定各索段的几何位置。

三、分布荷载作用下的单根悬索计算

1．平衡微分方程

悬索在分布荷载作用下的几何形状是曲线。

图 15-1-3（a）表示竖向分布荷载 q（x）作用下的单根悬索 AB，其曲线可用函数 y=y（x）表示。取任一微段索 dx 为隔离体，其受力情况如图 15-1-3（b）所示。

由 $\sum F_y = 0$ 可得

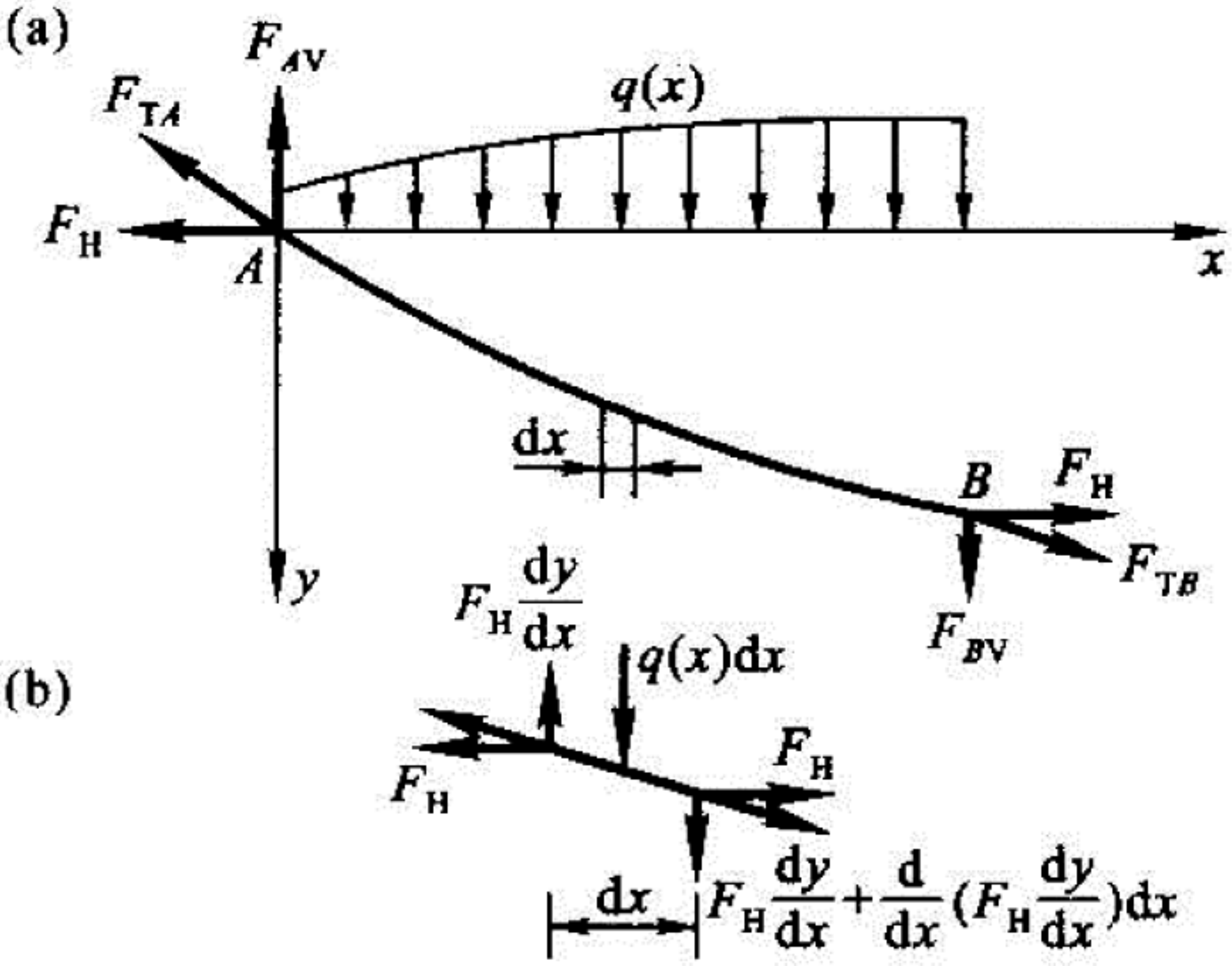


图 15-1-3

$$-F_H \frac{dy}{dx} + F_H \frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}\left(F_H \frac{dy}{dx}\right)dx + q(x)dx = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(F_H \frac{dy}{dx}\right)dx + q(x)dx = 0$$

即

$$F_H \frac{d^2 y}{dx^2} + q(x) = 0 \qquad (15\text{-}1)$$

2．常见分布荷载作用下平衡微分方程的解

（1）沿跨度方向均布荷载 q 作用

①求解平衡微分方程

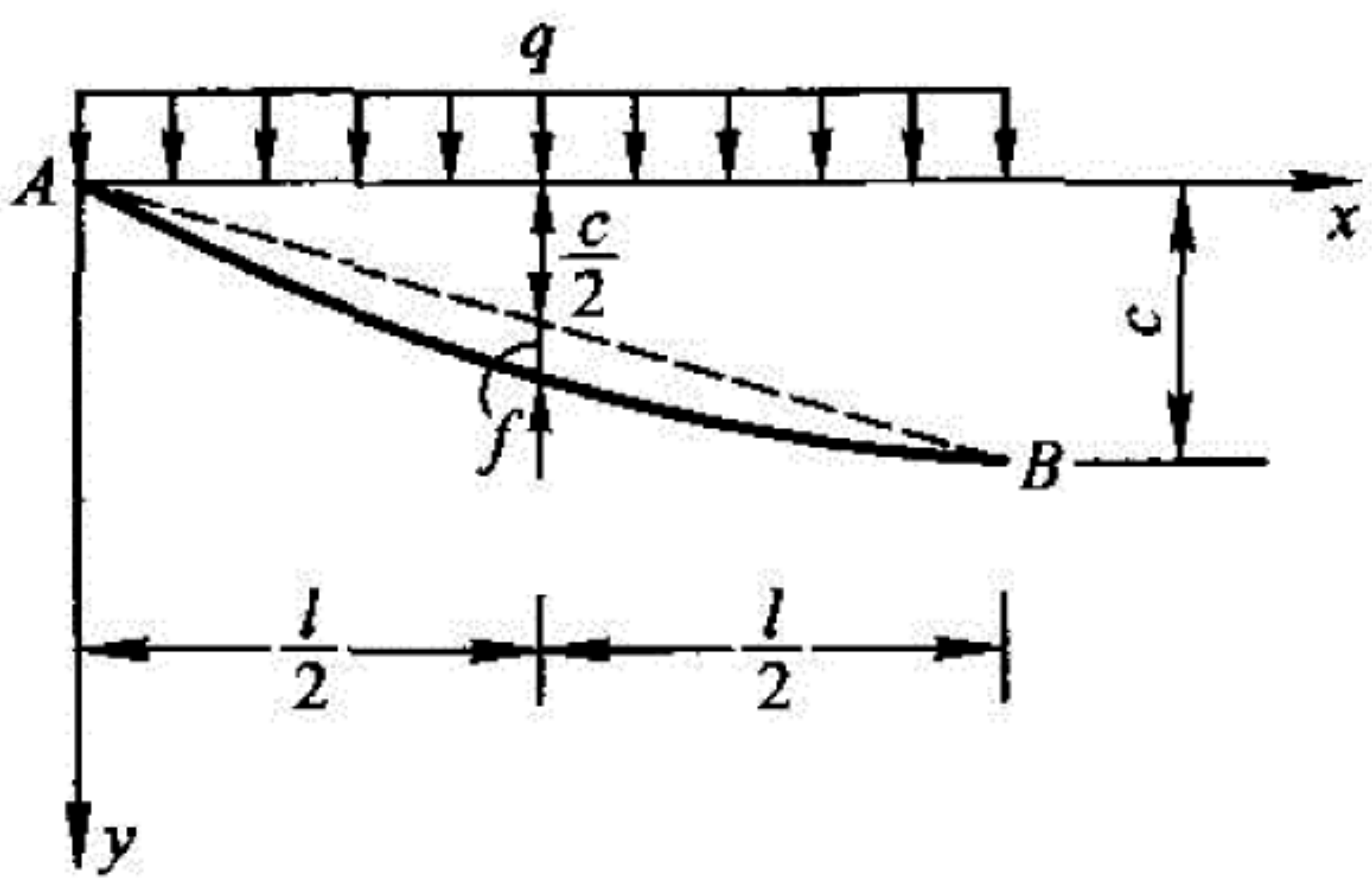


图 15-1-4

a．初解方程

如图 15-1-4 所示，因 q=常量，式（15-1）积分两次并根据边界条件可得

$$y=\frac{q}{2F_H}x(l-x)+\frac{c}{l}x \qquad (15\text{-}2)$$

b．求张力水平分量 F_H

通常给定悬索跨中垂度 f 作为控制值，即令

$$x=\frac{l}{2}\text{时}，\quad y=\frac{c}{2}+f$$

据此即可由式（15-2）求得索中张力水平分量为

$$F_H=\frac{ql^2}{8f}$$

c．方程的解

$$y=\frac{c}{l}x+\frac{4fx(l-x)}{l^2}$$

式中，右端第一项代表弦 AB 的直线方程；第二项代表以弦 AB 为基线的悬索曲线方程。

当 AB 为一水平线时，c＝0，故第一项应为零，则有

$$y=\frac{4fx(l-x)}{l^2}$$

②索中各点的张力

$$F_T=F_H\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

当索较平坦时，例如当$\frac{f}{l}\leqslant 0.1$时，$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$与 1 比较可略去不计，而近似地采用

$$F_T=F_H$$

（2）沿索长度均布荷载 q

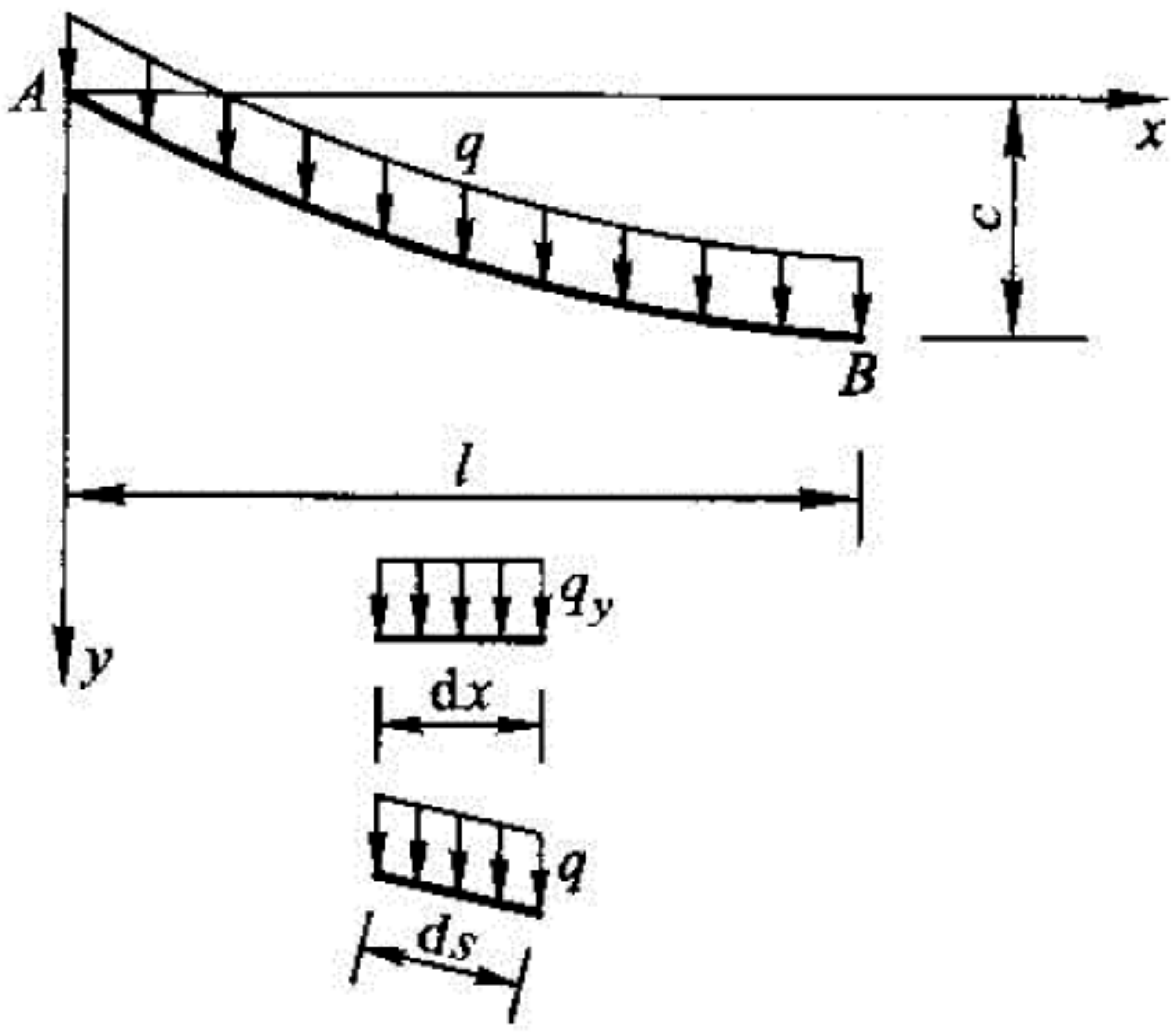


图 15-1-5

①转化 q

将 q 转化为沿跨度方向的等效均布荷载 q_y 为

$$qds=q_ydx$$

因此

$$q_y = q\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = q\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

②初解微分方程

将上式代入式（15-1）得

$$F_H\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + q\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = 0$$

积分求解并根据边界条件可得

$$y = \frac{F_H}{q}\left[\cosh\alpha - \cosh\left(\frac{2\beta}{l}x - \alpha\right)\right]$$

式中

$$\alpha = \operatorname{arsinh}\left[\frac{\beta\left(\frac{c}{l}\right)}{\sinh\beta}\right] + \beta$$

$$\beta = \frac{ql}{2F_H}$$

当 AB 位于水平方向时，c＝0，$\alpha = \beta = \frac{ql}{2F_H}$，则有

$$y = \frac{F_H}{q}\left[\cosh\alpha - \cosh\left(\frac{q}{F_H}x - \alpha\right)\right]$$

③求张力水平分量 F_H

若给定跨中垂度，即当 $x = \frac{l}{2}$ 时，y＝f，则可得

$$f = \frac{F_H}{q}(\cosh\alpha - 1)$$

据此可算出 F_H。

④方程的解

把 F_H 代入相应的表达式中，即可的到方程的解。

3．任意分布荷载作用下平衡微分方程的解——梁比拟法

任意分布荷载作用下悬索曲线的形状与相应简支梁弯矩图的形状完全相似。

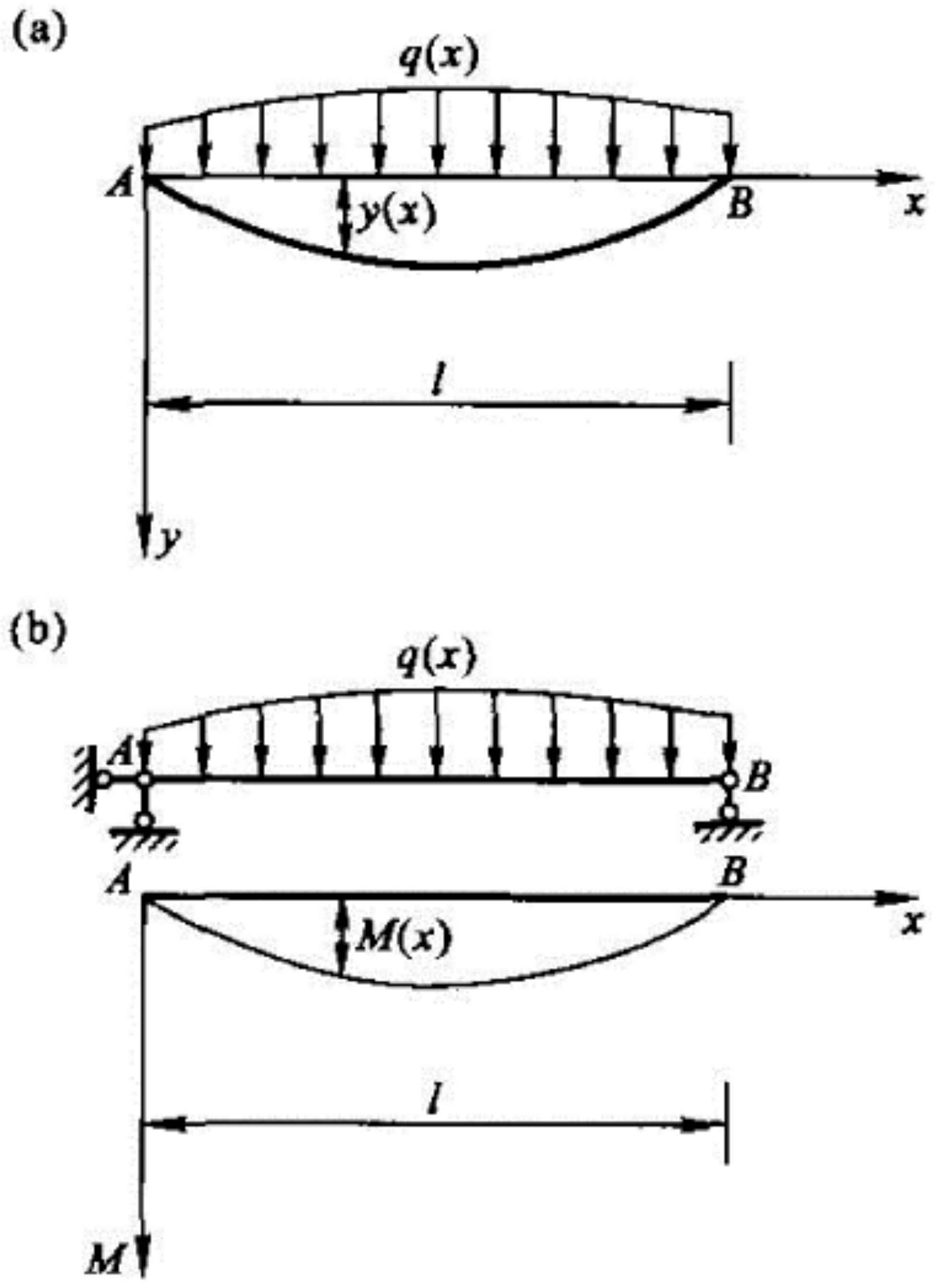


图 15-1-6

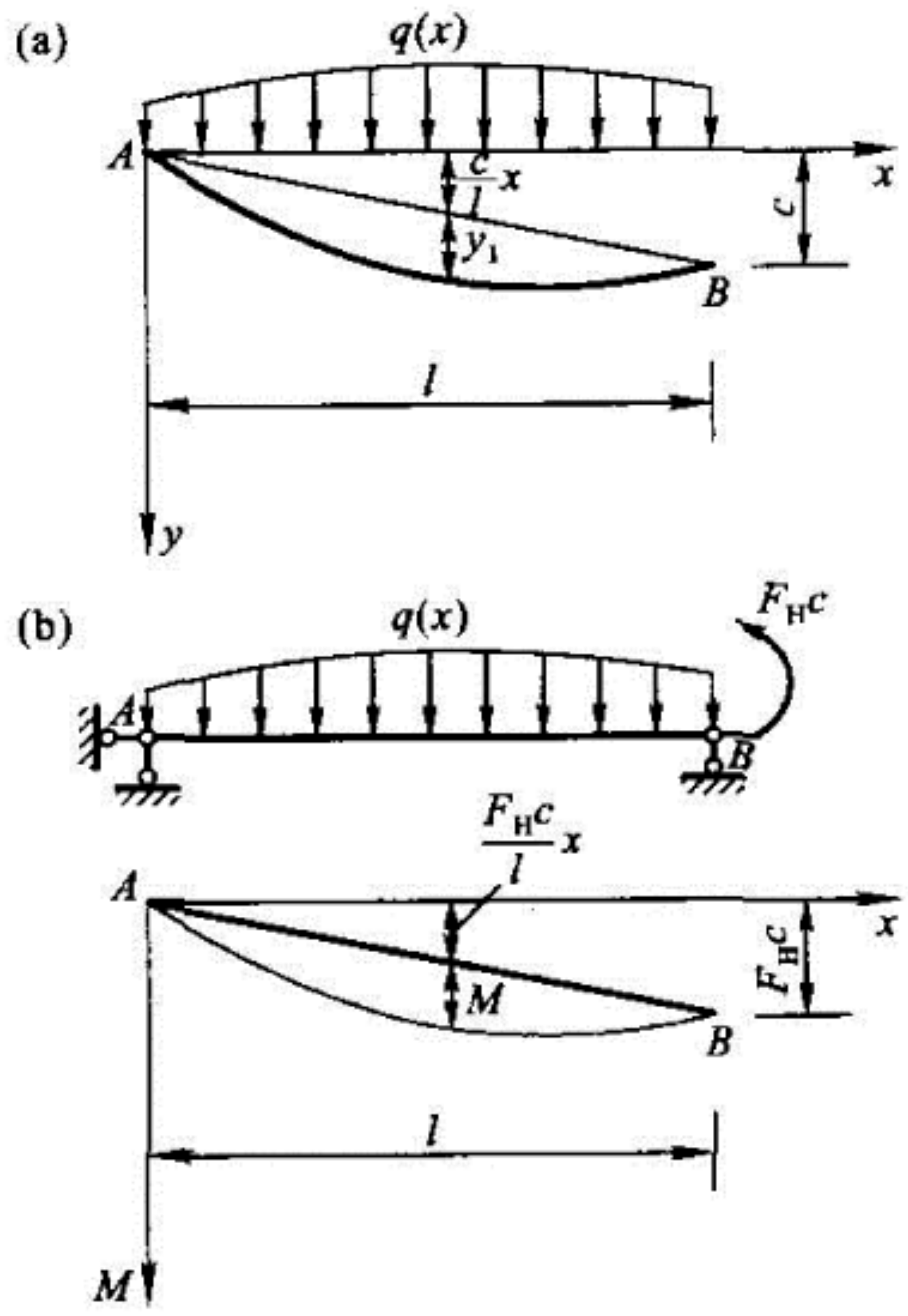


图 15-1-7

（1）两端等高的悬索

其曲线为

$$y(x)=\frac{M(x)}{F_H}$$

式中，M（x）为分布荷载 q（x）作用下相应简支梁的弯矩图。

（2）两端支座高差为 c 的悬索

其曲线为

$$y(x)=\frac{M(x)}{F_H}+\frac{c}{l}x$$

式中，右端第二项代表悬索支座连线 AB 的竖标；第一项代表以弦 AB 为基线的悬索曲线竖标 y_1（x），即 $y_1(x)=\frac{M(x)}{F_H}$。

4．悬索长度的计算

由图 15-1-8 所示悬索 AB 中取一微分单元 ds。

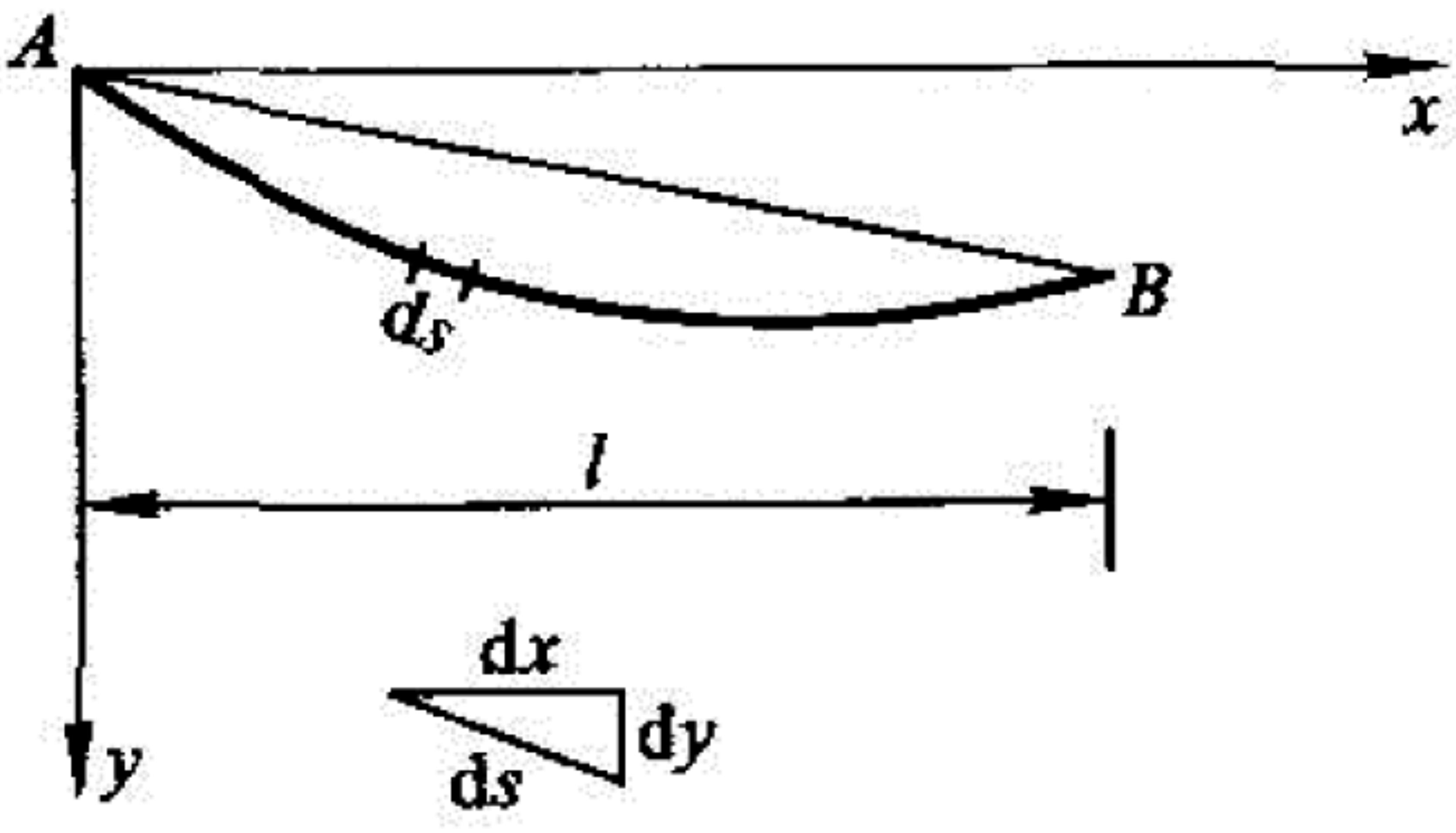


图 15-1-8

（1）整根悬索 AB 的长度

$$s \approx \int_A^B \mathrm{d}s = \int_0^l \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x$$

（2）将 $\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$ 按级数展开为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^4+\frac{1}{16}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^6-\frac{5}{128}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^8+\cdots$$

（3）根据悬索垂度的大小，取有限项积分，即可达到所需的精度。

①取两项时

$$s = \int_0^l \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

②取三项时

$$s = \int_0^l \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^4\right]\mathrm{d}x$$

四、悬索的变形协调方程及初态终态问题求解

1．悬索实际计算问题的一般模式

给定一初始状态，在此状态中，悬索承受荷载 q_0，位置 y_0 和内力 F_{H0} 均已知，求荷载产生增量 Δq，即荷载在最终状态成为 $q=q_0+\Delta q$ 时，悬索的位置 y 与内力 F_H。

2．悬索的变形协调方程

图 15-1-9 所示悬索初始位置为 AB，最终位置为 A'B'，左、右两端位移分别为 u_L，v_L 和 u_R，v_R。若外因中包含有温度变化，并已知悬索在位移过程中的温度变化值为 Δt。

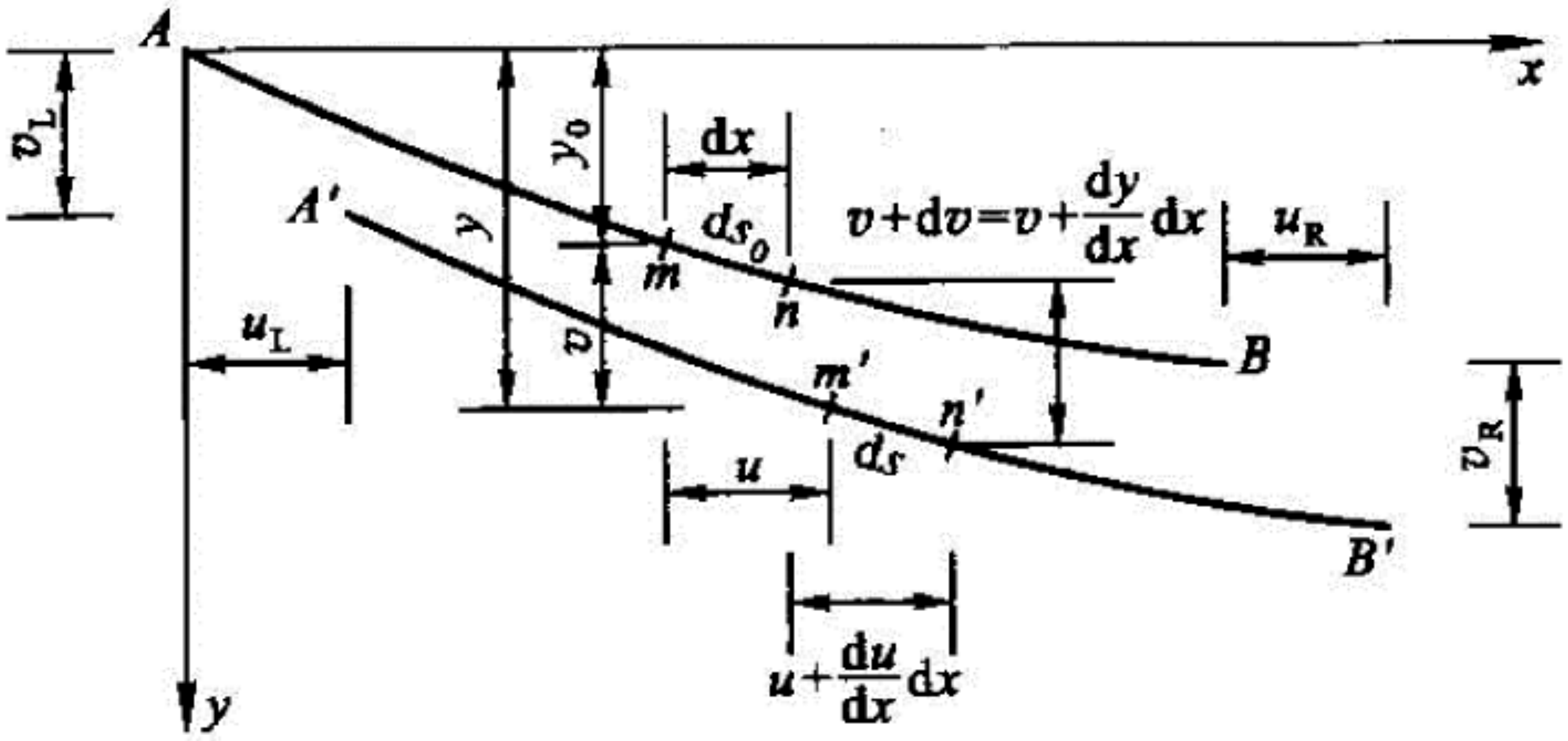


图 15-1-9

$$\frac{F_H-F_{H0}}{EA}l = u_R-u_L+\frac{1}{2}\int_0^l\left[\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x-\alpha\Delta t l$$

或

$$\frac{F_H-F_{H0}}{EA}l = u_R-u_L+\int_0^l\left[\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x-\alpha\Delta t l$$

式中，α 为钢索的线膨胀系数；F_{H0} 为初始状态的内力；F_H 为最终状态的内力。

仅当 $\frac{f}{l}\leqslant 0.1$ 时，才能得到较高的计算精度。

3．单根悬索初态终态问题的求解

（1）一般载荷作用下单根初态终态问题的求解

设悬索在初始状态时的荷载 q_0，悬索曲线形状函数 y_0 和初始内力 F_{H0} 均已知。

①初始状态平衡方程

$$y_0 = \frac{M_0(x)}{F_{H0}} + \frac{c_0}{l}x \tag{15-3}$$

式中，M_0（x）为 q_0 作用下相应简支梁的弯矩；c_0 为悬索两端支座高差。

②最终状态平衡方程

当荷载变化为 $q=q_0+\Delta q$ 后，悬索过渡到最终状态，最终状态方程为

$$y = \frac{M(x)}{F_H} + \frac{c}{l}x \tag{15-4}$$

式中，M（x）为 q 作用下相应简支梁弯矩；c 为终止状态悬索两端支座高差。

③变形协调条件

$$F_H - F_{H0} = \frac{EA}{2l}\int_0^l \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2\right]dx + EA\frac{u_R - u_L}{l} - EA\alpha\Delta tl \tag{15-5}$$

④求解 F_H 和 y

微分式（15-3）与（15-4）可得

$$\frac{dy_0}{dx} = \frac{F_{S0}}{F_{H0}} + \frac{c_0}{l}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_S}{F_H} + \frac{c}{l}$$

式中，F_{S0} 与 F_S 分别为初始状态与最终状态中相应简支梁的剪力。

将上式代入式（15-5）可得

$$F_H - F_{H0} = \frac{EA}{2l}\left[\int_0^l \frac{F_S^2}{F_H^2}dx - \int_0^l \frac{F_{S0}^2}{F_{H0}^2}dx\right] + EA\frac{c^2 - c_0^2}{2l^2} + EA\frac{u_R - u_L}{l} - EA\alpha\Delta t$$

设

$$\int_0^l F_S^2 dx = D$$

$$\int_0^l F_{S0}^2 dx = D_0$$

则可得

$$F_H - F_{H0} = \frac{EA}{2l}\left(\frac{D}{F_H^2} - \frac{D_0}{F_{H0}^2}\right) + EA\frac{c^2 - c_0^2}{2l^2} + EA\frac{u_R - u_L}{l} - EA\alpha\Delta t$$

上式是以 F_H 为未知量的三次方程，由此可解得 F_H，然后由式（15-4）即可求得 y。

（2）在均布荷载作用下小垂度抛物线悬索内力计算

悬索仅承受均布荷载作用而无支座位移和温度变化。

①悬索的变形协调方程

$$\frac{F_H - F_{H0}}{EA}l = \frac{8}{3}\frac{f^2 - f_0^2}{l}$$

②平衡方程分别

$$f_0 = \frac{q_0 l^2}{8F_{H0}}$$

$$f = \frac{ql^2}{8F_H}$$

③求内力

$$F_H - F_{H0} = \frac{EAl^2}{24}\left(\frac{q^2}{F_H^2} - \frac{q_0^2}{F_{H0}^2}\right)$$

上式为均布荷载作用下求解悬索内力水平分量 F_H 的三次方程式，可以求出 F_H。

五、悬索体系的计算

1．计算方法

悬索体系由多根悬索组成，通常采用位移法进行计算。即是以索系之结点位移作为基本未知量，以结点间的索段作为计算单元，通过结点平衡条件建立典型方程，从而求解结点位移，最后求出各索段的内力。此法可以计算任何形状和复杂程度的悬索体系。

2．位移法的基本假定

（1）悬索的应力与应变保持线性关系。

（2）索系仅承受结点集中荷载作用，相邻结点间的索段均为直线。当悬索承受结点间分布荷载作用时，可按静力等效原则移置到结点上。

与前面计算不同的是，用位移法计算悬索体系时不受小垂度问题的限制，而且可以承受任何方向的荷载。

3．位移法的典型方程

$$F - R = K\Delta$$

式中，F 为结点荷载列阵；R 为未知位移的非线性项；K 为体系的线性工作部分的刚度矩阵；Δ 为未知结点位移分量的列矩阵。

4．位移法典型方程的求解步骤

（1）选择适当的荷载分级数。即用一正整数 m 除以结点荷载列阵 F；

（2）将 F / m 荷载加于悬索体系；

（3）应用迭代法进行求解；

（4）重复（2）、（3）两步运算，直至全部荷载加到悬索体系上，求出全部结点位移分量。

15.2　课后习题详解

复习思考题

1．悬索的受力与变形有什么特点？为什么它的平衡方程要按其变形后的几何尺寸与位置来建立？

答：（1）悬索的受力与变形各有如下特点：

①悬索受力

在荷载等外因作用下只产生轴向拉力，不产生弯矩、剪力和压力。

②悬索变形

几何形状的可变性，即几何形状随所受荷载不同而变化，位移与外荷之间的关系呈非线性且变形较大。

（2）因为悬索的几何形状随所受荷载不同而变化，且变形量和位移比较大，由应变产生的二阶微量不可以忽略，所以悬索的平衡方程要按其变形后的几何尺寸与位置来建立才准确。

2．集中荷载作用下悬索的计算与三铰拱的计算有何异同之处？

答：集中荷载作用下悬索的计算与三铰拱的计算的异同点：

（1）相同点

水平力的计算原理和形式上相同，即都是以简化后的简支梁计算模型为基础的。

（2）不同点

①三铰拱的水平反力计算时不需要分段，且数值等于铰点对应简支梁上的弯矩与拱高的比值；而悬索的水平力的计算需要根据具体形式分段，其数值等于该段内任一点对应的简支梁上的弯矩与该点到弦的距离的比值。

②拱中计算出的水平力为压力，而悬索中为拉力。

③三铰拱需要计算拱段的弯矩和剪力，而悬索结构不会产生剪力和弯矩。

3．悬索在沿跨度和索长度均布荷载作用下的变形和内力有什么特点？

答：（1）悬索在沿跨度均布荷载作用下：

①变形特点：变形曲线为二次抛物线，该抛物线方程由弦的直线方程和以弦为基线的悬索曲线方程组成；

②内力特点：当悬索较平坦时，索中的各点张力近似等于其水平分量。

（2）悬索沿索长度均布荷载作用下：

①变形特点：变形曲线为较为复杂的悬链线；

②内力特点：悬索的张力与悬索的形状有关。

4．什么是悬索变形协调方程？它对悬索实际计算问题的求解有什么作用？

答：（1）悬索的变形协调方程是指一个悬索由初始状态过渡到最终状态时，反映内力与位移变化关系的方程。

（2）悬索的微分方程及其解虽然建立了某一特定状态的 q、y 与 F_H 三者的关系，但是并未考虑状态的变化过程，因而无法解决实际计算问题，从数学的角度看，要求解 y 与 F_H 两个未知量，只有一个平衡方程也是不够的，所以需要补充变形协调方程才能够求解悬索结构的内力和变形。

习题

15-1　试计算图示悬索支反力和各索段内力。假设各索段均为直线，索自重不计。

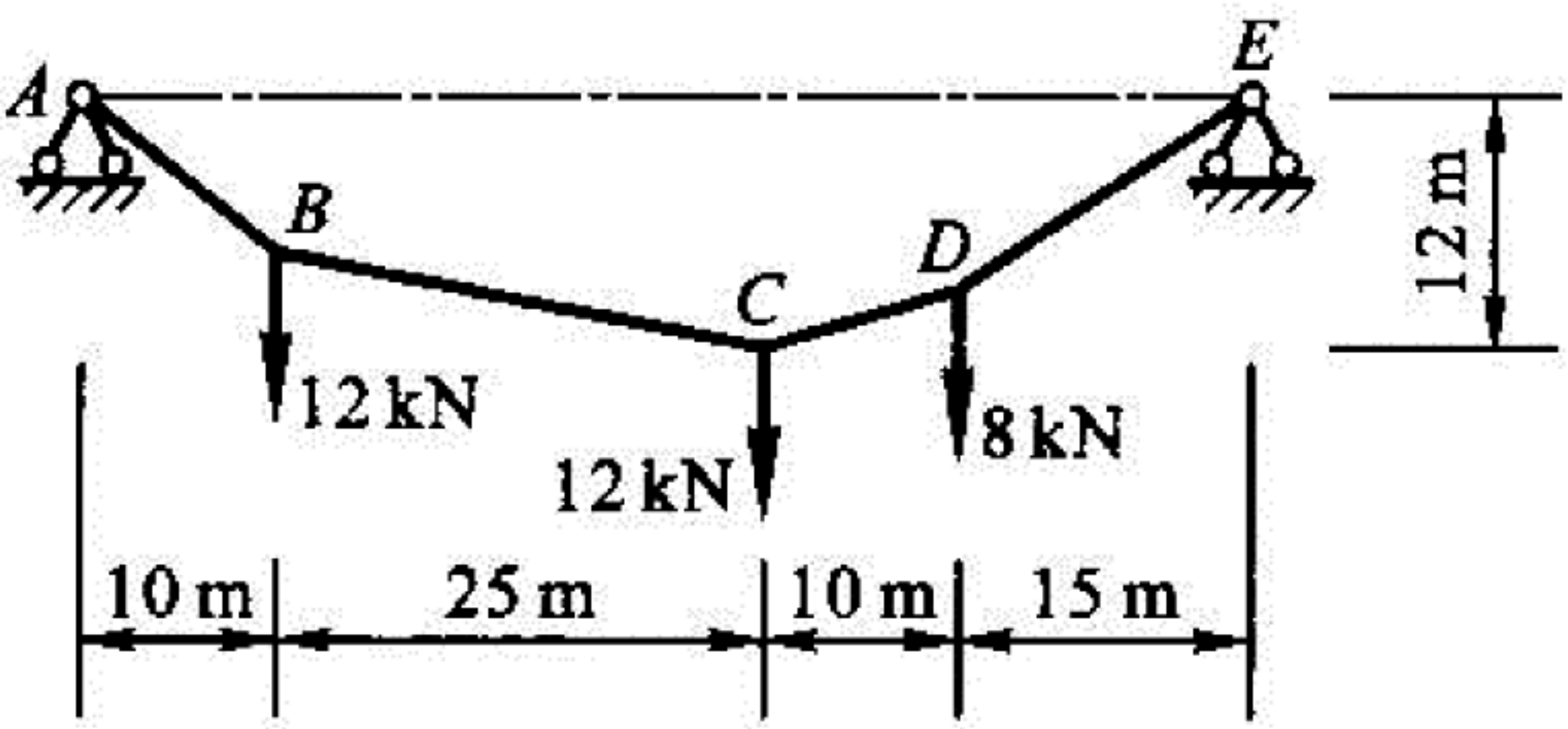


图 15-2-1（题 15-1）

解：由 $\Sigma M_E=0$，即 $F_{Ay}60-12\times50-12\times25-8\times15=0$，算出 $F_{Ay}=17kN$；

由 $\Sigma F_y=0$，即 $F_{Ay}-12-12-8+F_{Ey}=0$，得出 $F_{Ey}=15kN$。

然后可以算出水平支座反力如下

$$F_H=\frac{M_c^0}{f}=\frac{17\times35-12\times25}{12}=24.6kN$$

由力的平衡算出各索段内力，如图 15-2-2 所示。

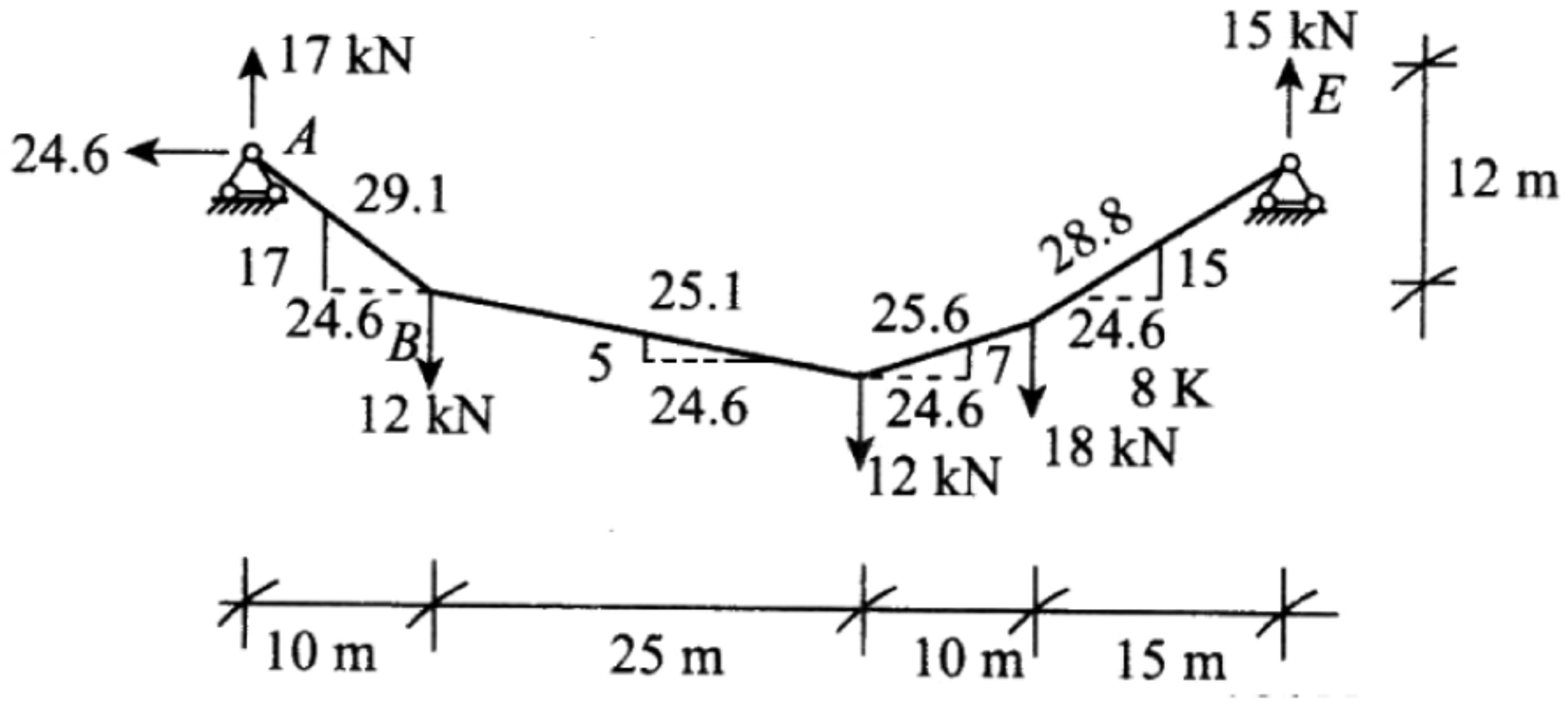


图 15-2-2

15-2　试计算图示支承屋盖悬索的最大拉力。（a）按悬链线计；（b）按抛物线计。悬索自重为 0.135kN / m。

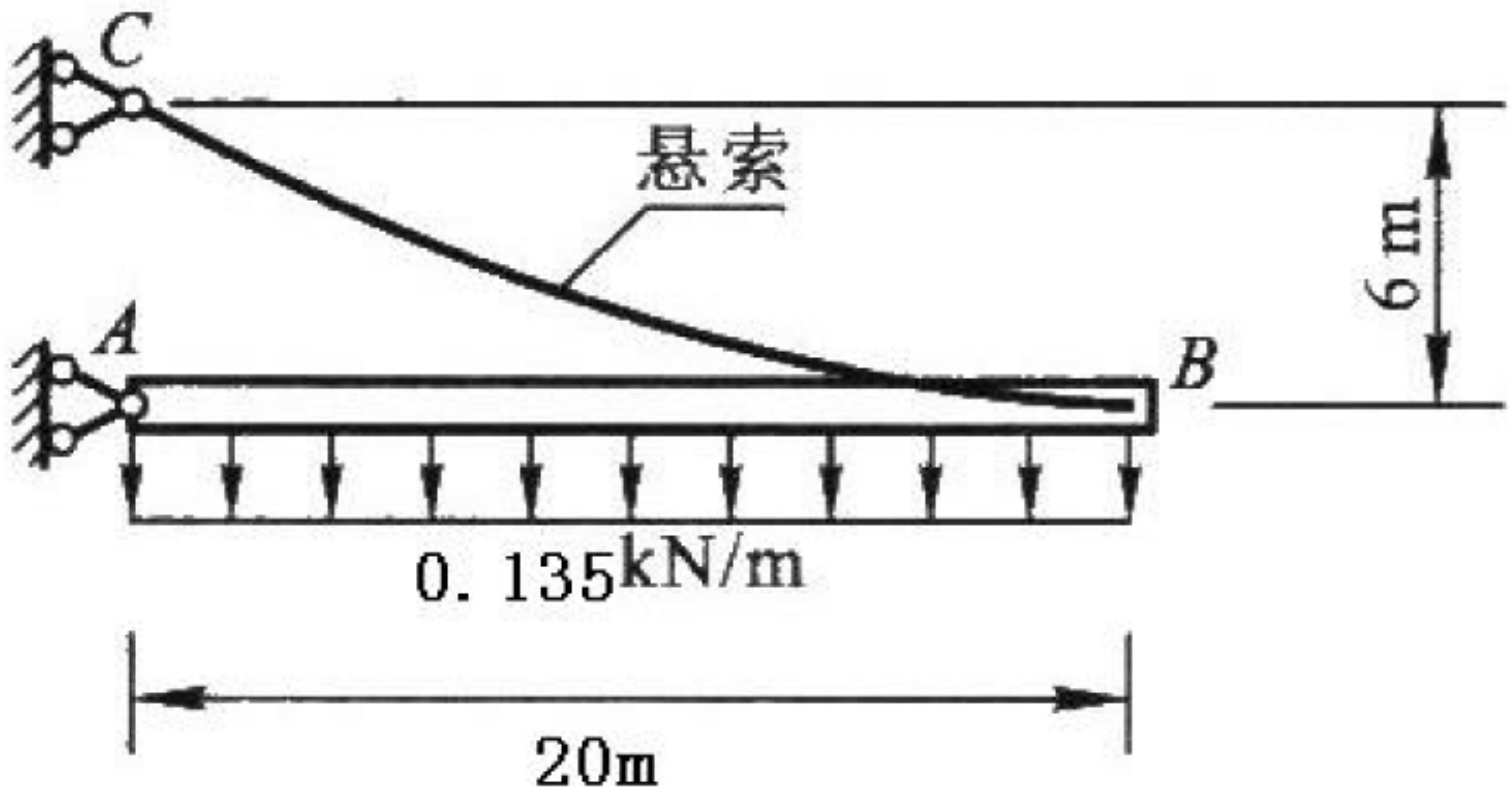


图 15-2-3（题 15-2）

解：由$\Sigma M_A=0$，H＝45kN

（a）按悬索链线计算时，有如下计算结果：

$$\beta=\frac{0.135\times 20}{2\times 45}=0.03$$

$$\alpha=sh^{-1}\left[\frac{0.03\times\frac{6}{20}}{sh0.03}\right]+0.03=0.325630$$

$$y=\frac{45}{0.135}\left[ch\alpha-ch\left(\frac{2\beta}{l}x-\alpha\right)\right]$$

$$=359.8021-\frac{45}{0.135}ch\left(0.003x-\alpha\right)$$

$$y'=-sh\left(0.003x-\alpha\right)$$

$$x=0,y'=y'_{max}=-sh(-\alpha)=0.331415$$

$$F_{T\max}=H\sqrt{1+\left(y'_{max}\right)^2}=45\sqrt{1+\left(0.331415\right)^2}=47.407kN$$

（b）按抛物线计算时，有如下计算结果

$$q_y = 0.135\,\frac{\sqrt{20^2+6^2}}{20} = 0.141\text{kN/m}$$

$$f = \frac{0.141\times 20^2}{8\times 45} = 0.1567$$

$$y'_{\max} = \frac{c+4f}{l} = \frac{6+4\times 0.1566}{20} = 0.331321$$

$$F_{T\max} = H\sqrt{1+(y'_{\max})^2} = 45\sqrt{1+(0.331321)^2} = 47.406\text{kN}$$

15-3　图示抛物线悬索桥跨度 l=30m，桥自重（包括索重）传至悬索时按均布荷载 q_0=8kN／m 计，跨中初始垂度 f_0=3m，当车队通过时按 Δq =20kN／m 计。试求这时悬索张力水平分量 F_H 及跨中垂度增量 Δf 。已知悬索横截面 A=4044mm^2，E=166.6GPa。

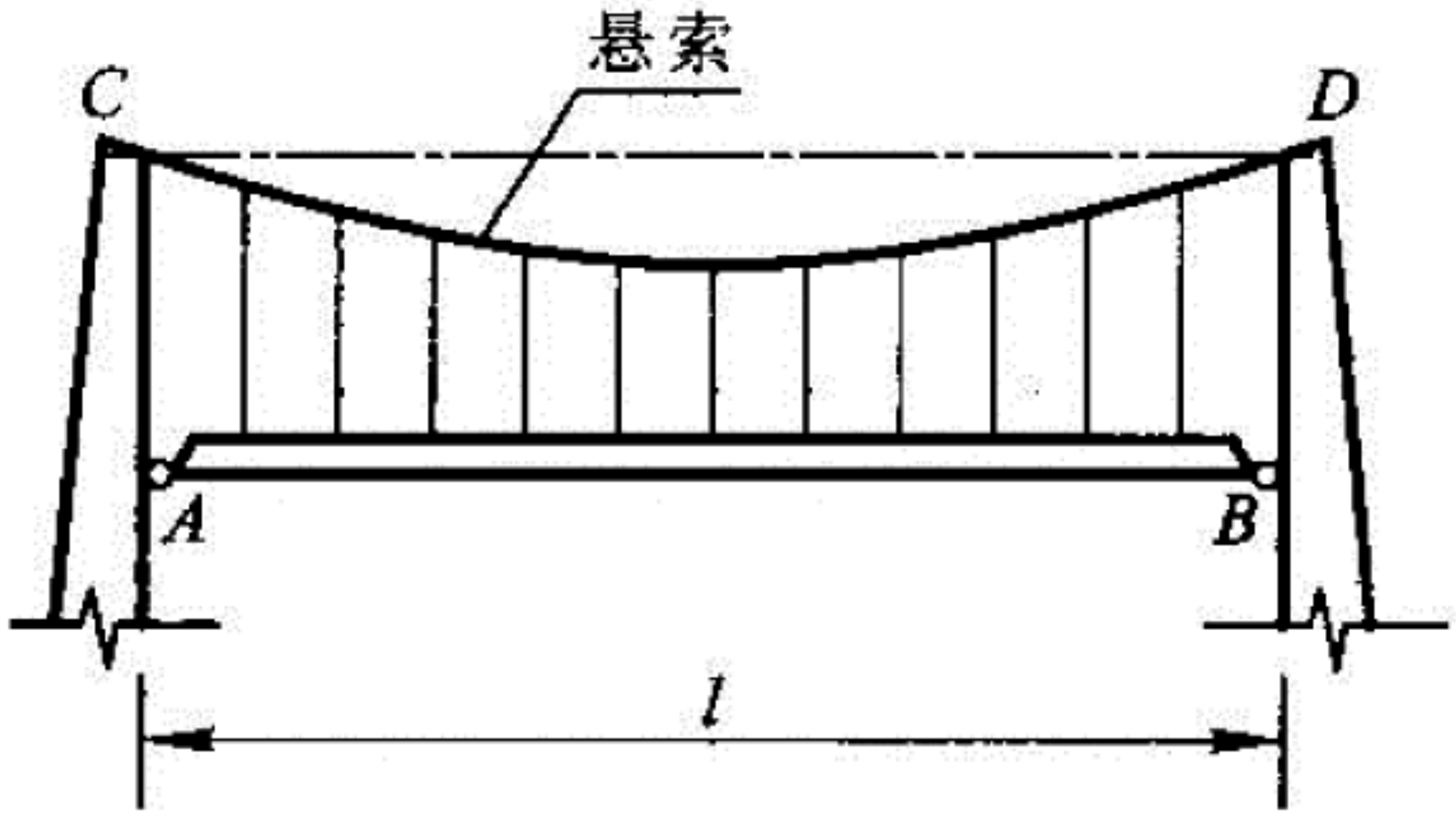


图 15-2-4（题 15-3）

解：已知跨中初始垂度，根据公式 $f_0 = \dfrac{q_0 l^2}{8F_{H0}}$，可算得初始水平力 $F_{H0} = 300kN$ 。

将所有数据代入下面公式之中

$$F_H - F_{H0} = \frac{EAl^2}{24}\left(\frac{q^2}{F_H^2} - \frac{q_0^2}{F_{H0}^2}\right)$$

得到

$$F_H^3 - 1010.353kN\cdot F_H^2 - 20091167.38kN^3 = 0$$

将此方程改写成如下迭代形式

$$F_H = \sqrt{\frac{20091167.38kN^3}{F_H - 1010.353kN}}$$

先根据 F_{H0} 估计一个 F_H 的初值代入上式试算，经过几轮迭代后，即可求得 F_H=1029.316kN。

悬索最终状态的跨中垂度为

$$f = \frac{ql^2}{8F_H} = \frac{28\times 30^2}{8\times 1029.316} = 3.06028m$$

所以跨中垂度增量 $\Delta f = f - f_0 = 3.06028 - 3 = 0.06028m$ 。

15.3　名校考研真题详解

本章暂未编选名校考研真题。